EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN
ONDER LEIDING VAN J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES
OFFICIEEL ORGAAN VAN LIWENAGEL EN VAN WIMECOS

22e JAARGANG 1946/47

Nr. 2 en 3

P. NOORDHOFF N.V. – GRONINGEN

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijkse afleveringen. Prijs per jaargang *f* 6,30*. Zij die tevens op het Nieuw Tijdschrift (*f* 6,30*) zijn ingetekend, betalen *f* 5,25*.

De leden van Liwenagel (Leraren in wiskunde en natuurwetenschappen aan gymnasia en lycea) en van Wimecos (Vereeniging van leeraren in de wiskunde, de mechanica en de cosmografie aan Hoogere Burgerscholen en Lycea) krijgen Euclides toegezonden als Officieel Orgaan van hun Verenigingen; de leden van Liwenagel storten de abonnementskosten ten bedrage van *f* 2,— op de postgirorekening no. 59172 van Dr. H. Ph. Baudet te 's Gravenhage. De leden van Wimecos storten hun contributie voor het verenigingsjaar van 1 September 1946 t/m 31 Augustus 1947 (waarin de abonnementskosten op Euclides begrepen zijn) op de postgirorekening no. 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam. De abonnementskosten op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde moeten op postgirorekening no. 6593 van de firma Noordhoff te Groningen voldaan worden onder bijvoeging, dat men lid is van Liwenagel of Wimecos. Deze bedragen *f* 6,75 per jaar franco per post.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans van Mierisstraat 112; Tel. 28341.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

INHOUD.

Verslag van het Congres van 30 Oct. j.l. te Amsterdam gehouden.

Het Bestuur van het Congres, dat op 30 October j.l. te Amsterdam is gehouden en georganiseerd door de Vereenigingen Liwenagel, Velines, Velebi en Wimecos, deelt mede, dat het verslag van dit Congres aan de deelnemers zal worden toegezonden, zoodra het gereed is. In verband met verschillende aanvragen om dit verslag zal het ook afzonderlijk verkrijgbaar worden gesteld en wel voor *f* 2,50 voor leden en voor *f* 3,50 voor niet-leden van bovengenoemde Vereenigingen. De tekst van de op dit Congres gehouden Voordrachten zal *alleen* in dit verslag worden gepubliceerd. In verband met de beperkte oplage moet het Bestuur aan iederen niet-deelnemer aan het Congres verzoeken, zich eventueel voor dit verslag zoo spoedig mogelijk op te geven. Dit moet geschieden bij den 2den Secretaris-Penningmeester van het Congres onder toezending per postwissel van het verschuldigde bedrag. In ieder geval moeten de opgaven voor 31 Januari a.s. binnen zijn gekomen.

Namens het Congresbestuur:

J. J. TEKELENBURG
2de Secretaris-Penningmeester,
Bergsche laan 13a, Rotterdam (N.).

WISKUNDIG DISPUUT

Te Rotterdam is opgericht het wiskundig dispuut
„Thomas Stieltjes".

Het ligt in de bedoeling enkele onderwerpen uit de moderne algebra in cursorisch verband gezamenlijk te bestuderen aan de hand van inleidingen door de leden zelf.

Begonnen zal worden met de groepentheorie.

De colloquia zullen worden gehouden eenmaal in de 3 weken.

Belangstellenden worden verzocht zich in verbinding te stellen met één der ondergetekenden:

Drs. H. Pleysier, Nobelstraat 105b, Rotterdam, (tel. 47554);
Dr. M. v. Vlaardingen, v. Beuningstr. 4 D, R'dam, (tel. 47259);
P. F. Wertheimer, Beukelsweg 27a, (tel. 31553).

VERSCHEIDENHEDEN

door

PROF. DR. O. BOTTEMA.

IX. *Evenwichtsvraagstukken in de ruimte.*

Onze leerboeken der elementaire mechanica behandelen ook het samenstellen van een niet-planimetrisch krachtenstelsel en in aansluiting daarop de evenwichtsvoorwaarden voor een ruimtelijk systeem. Het aantal toepassingen, dat men hierbij pleegt te geven is, voor zover ik weet, zeer beperkt. In elk leerboek komen enige vraagstukken voor, maar zij hebben over 't algemeen een weinig concreet karakter; zo treft men hier nogal eens opgaven aan, waarbij in de gegevens sprake is van „koppels van zoveel momentseenheden" en gelegen in bepaalde vlakken, een wijze van beschrijving van het krachtensysteem, welke naar mijn ervaring voor de leerlingen niet aantrekkelijk is. Daar komt bij, dat de stereometrische opgaven dikwijls bewerkelijk worden, doordat men de formule $\Sigma \cos^2 \alpha = 1$ een te grote rol laat spelen en een m.i. te grote plaats inruimt voor het begrip koppelvector. Het komt maar zelden voor, dat men de leerlingen een eenvoudig en aanschouwelijk ruimtelijk evenwichtsvraagstuk voorlegt. Terwijl het planimetrische evenwichtsgeval terecht uitvoerig besproken wordt en door tal van aardige opgaven toegelicht, komt het stereometrische er bepaald slecht af. De eindexamens H.B.S. van vroegere en latere jaren bevatten zonder uitzondering een statica-opgave; het is daarbij meen ik, slechts enkele malen voorgekomen, dat de krachten niet alle in één vlak liggen. De stereometrische opgaven hebben de reputatie te moeilijk te zijn voor onze leerlingen, naar ik meen ten onrechte. Hieronder volgen een drietal vraagstukken, waarbij de meetkundige kant van de zaak zo eenvoudig mogelijk is gehouden en die uitgaan van een goed voorstelbare situatie. De opgaven hebben geen andere pretentie dan te wijzen op een thema, dat misschien ten onrechte en uit ongegronde vrees verwaarloosd is gebleven. Zij zijn zelfs niet ironisch bedoeld, hoewel de schrijver op de hoogte is van de momentele appreciatie van het vak mechanica door de betrokken autoriteiten. Ongetwijfeld zijn zij de uiting van een zeker optimisme, van een speculatie *à la hausse* en mogen gezien worden als een bescheiden poging tot het brengen van afwisseling in de mechanicaopgaven. Wij mogen bedenken, dat het misschien voor een deel te wijten was aan een in het vak ontstane sleur en monotonie, dat twintig

jaren geleden de mechanica eveneens een tijdperk van geringe officiele waardering doormaakte.

De volgende opgave is een directe uitbreiding van een planimetrisch evenwichtsvraagstuk; de afmetingen zijn opzettelijk zo eenvoudig mogelijk gehouden.

Een homogene staaf AB (fig. 1) steunt in A tegen een verticale muur *M* en is door een koord BC verbonden met een punt C van *M* dat loodrecht boven A ligt; gegeven is AB = BC = CA = a. Hoe groot moet de wrijvingscoëfficient tussen de staaf en de muur minstens zijn, opdat er evenwicht is? De hoek die het vlak ABC met de muur maakt is α.

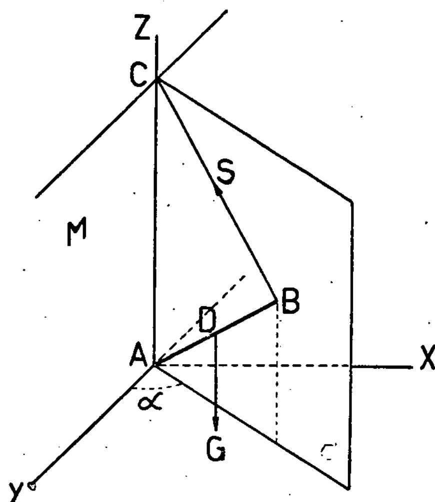


Fig. 1.

Voor $\alpha = 90°$ hebben wij een planimetrische opgave in de trant zoals onze leerlingen die veel onder de ogen krijgen; hetzij door berekening, hetzij door een eenvoudige constructie vindt men $f \geqq \sqrt{3}$. In het algemene geval hebben wij als S de spanning in BC, G het gewicht van de staaf en N_x, N_y en N_z de componenten zijn van de totale reactie van de muur op de staaf, terwijl het assenkruis gekozen wordt als in de figuur:

$$S_x = -\tfrac{1}{2} S\sqrt{3} \,.\, \sin\alpha \,,\; S_y = -\tfrac{1}{2} S\sqrt{3} \,.\, \cos\alpha \,,\; S_z = \tfrac{1}{2} S.$$

De eerste drie evenwichtsvoorwaarden zijn

$$N_x = \tfrac{1}{2} S\sqrt{3} \,.\, \sin\alpha \,,\; N_y = \tfrac{1}{2} S\sqrt{3} \,.\, \cos\alpha \,,\; N_z = G - \tfrac{1}{2} S.$$

De coördinaten van B zijn $\tfrac{1}{2}a\sqrt{3}$ sin α, $\tfrac{1}{2}a\sqrt{3}$ cos α, $\tfrac{1}{2}a$, die van het zwaartepunt D zijn half zo groot. De vergelijking, welke uitdrukt dat de som der momenten om de X-as gelijk nul is, luidt dus

$$\tfrac{1}{2} S \,.\, \tfrac{1}{2} a\sqrt{3} \cos\alpha + \tfrac{1}{2} S\sqrt{3} \cos\alpha \,.\, \tfrac{1}{2} a = G \,.\, \tfrac{1}{4} a\sqrt{3} \cos\alpha$$

waaruit volgt $S = \tfrac{1}{2}G$.

De overige twee evenwichtsvoorwaarden leren geen nieuws. Wij krijgen dus

$$N_x = \tfrac{1}{4} G\sqrt{3} \,.\, \sin\alpha \,,\; N_y = \tfrac{1}{4} G\sqrt{3} \,.\, \cos\alpha \,,\; N_z = \tfrac{3}{4} G.$$

De tangentiele reactie van de muur is $N_t = \sqrt{N_y^2 + N_z^2} = \tfrac{1}{4} G\sqrt{9 + 3\cos^2\alpha}$; de wrijvingscoëfficient moet dus minstens gelijk

zijn aan $\frac{N_t}{N_x} = \frac{\sqrt{3 + \cos^2 \alpha}}{\sin \alpha}$; deze uitdrukking neemt, zools verwacht kon worden, toe bij afnemende waarde van α.

Men kan natuurlijk het vraagstuk ook wel oplossen door het evenwicht der drie krachten G, S en N in het vlak ABC te beschouwen; men vindt dan de richting van N en kan deze kracht loodrecht op en langs de muur ontbinden.

Een tweede opgave is ontleend aan de physica. Een homogene staaf PQ lengte $2a$, gewicht G, is in horizontale stand opgehangen aan twee verticale koorden AP en BQ, elk ter lengte b, zodanig dat PQBA een rechthoek is. Op P resp. Q gaan tegengesteld gerichte, even grote krachten K werken; deze krachten hebben horizontale werklijnen, welke AB loodrecht kruisen. In de nieuwe evenwichtsstand maakt PQ een hoek φ met AB. Bepaal het verband tussen K en φ.

Fig. 2.

In de nieuwe evenwichtsstand werken op de staaf de volgende krachten; het gewicht G, de spanningen S in de koorden PA en QB, de horizontale krachten K in P en Q (fig. 2). Zijn A′ en B′ de projecties van A en B op het horizontale vlak door PQ, dan is

$$PA = QB = b,\ PA' = QB' = c = 2a \sin \tfrac{1}{2}\varphi,$$

$$AA' = BB' = d = \sqrt{b^2 - 4a^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\varphi}.$$

De verticale componenten van de spanningen in de koorden zijn $\frac{d}{b}$S, zodat men heeft $\frac{2d}{b}S = G$ of $S = \frac{b}{2d}G$. De componenten langs PA′ en QB′ van de spanningen moeten nu met de beide krachten K evenwicht geven. Neemt men de momenten t.o.v. het midden van de staaf, dan vindt men:

$$\frac{CG}{2d}\, a \cos \tfrac{1}{2}\varphi = K \,.\, a \cos \varphi,$$

waaruit volgt

$$K = G \frac{a \operatorname{tg} \varphi}{2\sqrt{b^2 - 4\,a^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\varphi}}.$$

Zal de staaf 180° kunnen draaien, dan moet $b \geqq 2a$ zijn, zoals ook uit de noemer van de breuk blijkt. Het grensgeval $b = 2a$ geeft een eenvoudige uitkomst

$$K = G \frac{\sin \tfrac{1}{2}\varphi}{2 \cos \varphi}.$$

De resultaten zouden natuurlijk ook met de methode der virtuele verplaatsingen verkregen kunnen worden.

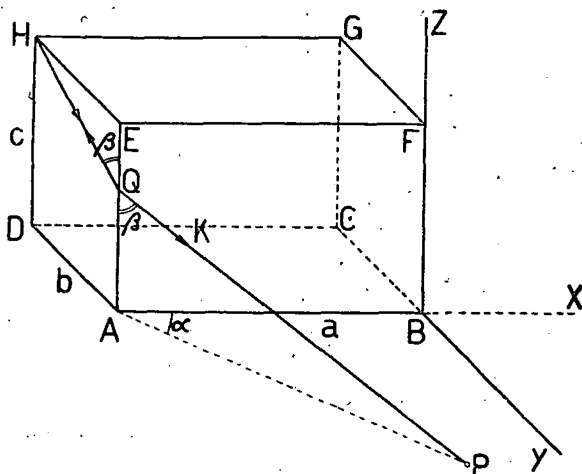


Fig. 3.

Ons derde voorbeeld betreft een homogeen rechthoekig parallelepipedum ABCDEFGH (fig. 3). AB $= a$, AD $= b$, AE $= c$, met gewicht G, welke op een horizontaal vlak staat. In het hoekpunt H is een koord bevestigd, dat langs het zijvlak AEHD en om de ribbe AE heenloopt naar het punt P van het horizontale vlak. Daarbij zijn AP $= r$ en $\angle$ PAB $= \alpha$ gegeven. Aan het koord wordt met een kracht K getrokken. Onderzoek het evenwicht.

Veronderstelt men, dat er geen wrijving is tussen het koord en het lichaam, dan moeten de verticale componenten van de spanningen in Q langs QP en QH elkaar opheffen. Hieruit volgt $\angle$ AQP $= \angle$ EQH $= \beta$. Anders gezegd: het koord neemt de gedaante aan van de kortste verbindingslijn van H naar P; als men PAQ om AQ wentelt in AEHD, dan wordt HQP een rechte lijn. Men heeft dus

$$\text{AQ} = \frac{cr}{b+r}, \quad \cos\beta = \frac{c}{l}, \quad \sin\beta = \frac{b+r}{l},$$

waarbij $l = \sqrt{c^2 + (b+r)^2}$ de lengte van het koord voorstelt. Voor de opgave is het nu verder hetzelfde, alsof K rechtstreeks in Q aangrijpt. Op het parallelepipedum werken verder het gewicht G, de normale reactie N, die aangrijpe in het punt van het grondvlak, dat tot AB de afstand p en tot BC de afstand q heeft en ten slotte de wrijving W, die wij zo groot veronderstellen, dat het lichaam niet gaat glijden. Deze wrijving heeft als werklijn (volgens een in *Verscheidenheden*, V. gemaakte opmerking) de rechte PA. On-

middellijk blijkt nu: N = G + K cos β, W = K sin β. Neemt men het assenkruis, zoals in de figuur is aangegeven, dan volgt voor de momenten om de X-as en de Y-as resp.

$$K \sin \beta \sin \alpha \cdot \frac{cr}{b+r} - {}^1\!/_2\, bG + (G + K \cos \beta)\, p = 0$$

$$K \sin \beta \cos \alpha \cdot \frac{cr}{b+r} - K \cos \beta \cdot a - {}^1\!/_2\, aG + (G + K \cos \beta)\, q = 0$$

waaruit, als K = mG, gevonden wordt

$$p = \frac{{}^1\!/_2\, bl - mcr \sin \alpha}{l + mc},\ q = \frac{{}^1\!/_2\, al - mc\,(r \cos \alpha - a)}{l + mc}$$

of als x_0 en y_0 de coördinaten van P zijn:

$$p = \frac{{}^1\!/_2\, bl - mcy_0}{l + mc},\ q = \frac{{}^1\!/_2\, al - mcx_0}{l + mc}.$$

Het aangrijpingspunt van N doorloopt bij variabele m een rechte, die door het midden van het grondvlak ($m = 0$) en door P gaat ($m = \infty$). Als deze lijn AB, resp. BC snijdt, dan zal het lichaam ten slotte om AB, resp. BC gaan kantelen, het hangt er dus van af of P links of rechts van het verlengde van DB ligt. In het eerste geval ontstaat kantelen als $K > \frac{bl}{2cy_0} G$, in het tweede als $K > \frac{al}{2cx_0} G$.

X. SYMMETRIE.

In het eerste vraagstuk *Stereometrie* van het eindexamen der Hogere Burgerscholen B in 1944, was sprake van een viervlak ABCD waarvan gegeven is AC = BC en AD = BD en waaromtrent een aantal eigenschappen bewezen moest worden. De opgave was eenvoudig en de examinatoren en de deskundigen hadden daardoor het recht van de candidaten zorgvuldige en volledige bewijzen te verlangen. De ervaringen waren minder gunstig dan de verwachtingen en alle betrokkenen zullen nog eens hebben beseft, hoe moeilijk het blijkbaar is om een goed sluitend betoog te houden en dit in behoorlijk verzorgde taal weer te geven. En opnieuw kon blijken dat het vermogen tot het leveren van dergelijke prestaties, waarvan de algemeen vormende waarde niet licht kan worden overschat, bevorderd wordt door goed wiskunde-onderwijs. Naar mijn mening is de stereometrie bij uitstek geschikt, om de stof te geven, waaraan dit vermogen kan worden ontwikkeld en goed onderricht in de beginselen van dit vak is een geschenk van blijvende waarde voor de ontvankelijke geest. Nu is het dikwijls het àllermoeilijkst om een bewijs te geven van een eenvoudige en evidente eigenschap. In het

genoemde vraagstuk wordt onder meer gevraagd aan te tonen dat de verbindingslijn van het middelpunt van de omgeschreven met dat van de ingeschreven bol een rechte hoek maakt met AB. Het komt dus hierop neer te laten zien, dat beide middelpunten liggen in het middelloodvlak van AB, wat dan met name voor het middelpunt van de ingeschreven bol moeilijkheden bleek te geven. Naast vele stukken hol en zinledig proza heb ik hierbij ook verschillende aardige en vernuftige bewijzen onder de ogen gehad.

Er waren verscheiden candidaten, die — zonder veel verdere toelichting — zich beriepen op de *symmetrie* der figuur. De appreciatie van de examinatoren voor deze opmerking was zeer uiteenlopend en de financiele waardering voor een dergelijk antwoord schommelde van niets tot alles. En er is inderdaad voor beide uitersten iets te zeggen.

Het belang dezer zaak is niet tot het bewuste vraagstuk beperkt. De situatie komt herhaaldelijk voor bij figuren als kubussen, regelmatige piramiden etc., die in betrekkelijk hoge mate symmetrie bezitten.

Men kan natuurlijk en men moet eigenlijk het beroep op de symmetrie wraken als een beroep op de aanschouwing. Het te aanvaarden staat gelijk met de verloochening van de beginselen van het vak. Het gaat niet aan in de eerste klasse zijn uiterste best te doen om de jonge leerling ervan te doordringen dat het niet vanzelf spreekt, dat de hoogtelijn uit de top van een gelijkbenige driehoek de tophoek halveert, om dan enige jaren later bij ruimtelijke figuren analoge betogen zonder tegenspraak te accepteren.

Maar aan de andere kant: zal niet een wiskundige die het vraagstuk leest, zich de figuur voorstelt en bij het bewuste onderdeel bevestigend knikt bij wijze van instemming met de aldaar geponeerde eigenschap, gelijkertijd het sleutelwoord symmetrie mompelen? De kans dat hij dadelijk een stelsel van paren congruente driehoeken ziet, lijkt mij uiterst gering. En als de leerling datzelfde sleutelwoord neerschrijft, heeft hij een inzicht getoond, waarmee hij zich niet in slecht gezelschap bevindt en het is dus niet billijk hem met lege handen te laten gaan.

Er is dunkt mij alles vóór, om het vruchtbare begrip symmetrie officieel in te voeren en het woord niet langer te reserveren als een machtspreuk, waarmee men langdradige en weinig interessante bewijzen met congruente driehoeken overbodig maakt. Maar onafwijsbare eis is daarbij, dat men tegenover de leerlingen met in de wiskunde gebruikelijke scherpte definieert wat b.v. een symmetrievlak van een figuur is en de consequenties daarvan in de vorm van

een aantal eigenschappen demonstreert. En met deze grondslagen is het bewijs van de onderhavige stelling dan in enkele woorden te geven: bij spiegeling in middelloodvlak van AB gaan A en B in elkaar en C en D elk in zichzelf over, zodat het viervlak invariant is; het middelpunt van de omschreven en ook dat van de ingeschreven bol zijn enig in hun soort, zij zijn dus ook invariant èn liggen derhalve in het symmetrievlak.

Het is merkwaardig dat het begrip symmetrie, dat in de elementaire mechanica (zelfs in de vorm van scheve symmetrie) bij de zwaartepuntsbepalingen onmisbaar is, in de stereometrie zo weinig wordt toegepast.

Hetzelfde geldt voor invariantie bij rotatie om een as. Zo wordt b.v. bij de bespreking van de eigenschappen der regelmatige veelvlakken zelden ingegaan op het feit dat zij bij een bepaald stelsel van draaiingen op hun plaats blijven. Zelfs hoort men b.v. bij de kubus zelden iets over de eigenschap dat hij bij wenteling over 120° om de lichaamsdiagonaal AH invariant is, terwijl daarentegen het hiermee samenhangende feit dat AH loodrecht staat op het vlak door de uiteinden der drie in A samenkomende ribben op elke school *reçu* is. De betrokken eigenschappen der regelmatige veelvlakken lijken mij voor het meetkundig inzicht van meer belang dan de berekening van de stralen van de om- en de ingeschreven bol.

MATHESIS EN AESTHETICA

door

Dr J. C. H. GERRETSEN [1]).

Diep in het menselijk bewustzijn heeft steeds de overtuiging geleefd, dat de wereld geschapen is naar mathematische in de Geest van den Schepper sluimerende oervormen en dat de menselijke geest, krachtens zijn bizondere structuur, het mathematisch geordende Universum, als gevolg van de zekerheid en de stringentie der wiskundige kennis, even intensief kan doorgronden als God zelf, zij het dan ten dele en stap voor stap. Maar ook indien in de overlevering die overtuiging niet zou hebben bestaan, dan zouden de verbijsterende ontdekkingen op het gebied van de natuurwetenschappen en de verbazingwekkende ontwikkeling van de techniek haast onweerstaanbaar tot een dergelijke opvatting moeten leiden. Immers, bijgestaan door de wiskunde heeft de mens een bijkans onbeperkte macht verkregen over de krachten der Natuur. Oeroude dromen gaan in vervulling: chemische elementen kunnen in elkaar worden omgezet; de mens kan zich sneller dan de wind op vleugels voortbewegen. De wiskunde leert ons welke de afmetingen zijn van het Heelal; zij wijst ons de weg naar het binnenste van het atoom. In de handen van den geoefenden kenner is de wiskunde gelijk een toverstaf, bij welks aanraking de Natuur haar meest verborgen geheimen prijs geeft. Het was de wiskunde, die aan Leverrier de middelen verschafte om langs zuiver theoretische weg een planeet te ontdekken, die geen oog voordien had aanschouwd. In het geheimschrift van haar symbolen onthulde zij aan Maxwell het bestaan van electromagnetische golven, die met de snelheid van het licht woorden en klanken kunnen dragen over bergen en oceanen en waarmee luchtarmada's kunnen worden geleid door duisternis en mist. Het zijn wederom wiskundige beschouwingen, die Gibbs de phasenregel deden ontdekken, waarmee de grondslag voor de moderne metallurgie werd gelegd, die wonderbare wetenschap, die ons de beschikking geeft over de bouwstoffen, waarmee de ingenieuze en gecompliceerde machines kunnen worden vervaardigd, welke het aanschijn van de aarde volledig hebben gewijzigd.

---

[1]) Rede, uitgesproken bij de aanvaarding van het ambt van hoogleraar aan de Rijks-Universiteit te Groningen op 24 Oct. 1946.

Onze ingewikkelde technische civilisatie zou stellig zonder de wiskunde onmogelijk zijn. Zou iemand echter daaruit de gevolgtrekking willen maken, dat de belangrijkheid van de wiskunde voor onze samenleving beoordeeld moet worden naar de wijze, waarop zij behulpzaam is bij het efficiënt maken van de materiële hulpbronnen, dan zou hij getuigen van een oppervlakkig en eenzijdig inzicht in de aard van de cultuurvormende krachten. De vraag hoe dan wèl de wiskunde de cultuur beïnvloedt hangt natuurlijk ten nauwste samen met het onderzoek naar het wezen en het karakter van de wiskundige kennis. Het zou onredelijk zijn van mij te willen verlangen in een kort bestek de hiermee aan de orde gestelde vragen te beantwoorden. Ik moge mij er toe bepalen voor enkele aspecten van dit boeiende probleemgebied Uw zeer gewaardeerde aandacht te vragen.

De geschiedenis van de cultuur toont ons steeds weer opnieuw het tafereel van de worsteling van den enkeling om klaarheid over de zin van zijn bestaan; te midden van de verbijsterende wisseling der verschijnselen zoekt hij een rustpunt voor zijn ziel. En immerweer ervaren wij, hoe in de wiskunde het ideaal gevonden wordt van objectieve zekerheid en onveranderlijkheid. Het Heelal is niet de chaos, de loop der dingen wordt bepaald door eeuwige en onveranderlijke wetten: het boek der Natuur is geschreven in mathematische symbolen. Wanneer de grote denker Spinoza God wil kennen en verlossing zoekt van religieuze twijfel, acht hij alleen de mathematisch-geometrische uitdrukkingswijze passend voor de vormgeving van zijn gedachten. Bij de opbouw van het wijsgerig systeem in de „Ethica ordine geometrico demonstrata" volgt hij Euklides tot in de kleinste bizonderheden na.

Op schier elk gebied van de menselijke activiteit kan men, hetzij direct, hetzij indirect de invloed van de wiskunde bespeuren. Maar hoe kan dit geschieden? Hoe is het mogelijk, dat deze esoterische wetenschap, dit wonderlijke rijk van geheimzinnige formules en berekeningen, van mysterieuze lijnen en vormen, van onbegrijpelijke redeneringen en grillige, buiten de wereld der gewone dingen staande fantasieën, hoe is het mogelijk, dat deze, de meest abstracte van alle wetenschappen, een rol kan vervullen bij de wording van onze algemene cultuur?

Het zijn dan ook niet zozeer de resultaten van de wiskundige bezinning, welke van beslissende invloed zijn gebleken, als wel haar methode en haar aesthetisch verantwoorde vorm. Hét grote probleem, dat telkens weer van Descartes tot Kant het punt van uitgang voor de wijsgerige bezinning oplevert, is het probleem

van de juiste methode. De vraag, welke weg onze kennis moet volgen, dient beantwoord te worden vóór het betreden van die weg zelf, het onderzoek van het menselijk verstand. Juist door het bewuste streven naar de verkrijging van een algemene methode van kennen achten de denkers van deze periode zich onderscheiden van en verheven boven hun voorgangers.

Als paradigma geldt voor hen de geometrische kennis. De voortreffelijkheid van de geometrie bestaat in haar gesloten en systematische structuur, de wijze, waarop zij uit laatste duidelijke begrippen en axioma's een wetenschappelijk gebouw opricht. Zo wordt voor de wijsbegeerte van dit tijdperk de methodische grondvraag overal die naar de laatste, niet verder herleidbare begrippen en de laatste ontwijfelbare grondoordelen. Zodra het gelukt deze begrippen en grondoordelen te vinden, kan men een klaar en duidelijk beeld verkrijgen van het gebied der dingen, waarop die begrippen en oordelen betrekking hebben. Want, zo luidt het adagium: klaarheid en duidelijkheid is waarheid. Doel van de wijsbegeerte moet zijn een klaar en duidelijk beeld van de werkelijkheid. Tot de werkelijkheid behoort echter niet alleen de wereld der zichtbare en tastbare dingen, maar ook de ziel en God. De overtuiging van de identiteit van de goddelijke en de menselijke kennis in de objectieve zekerheid en absolute geldigheid van de mathematische waarheden deed de geesten zoeken naar de kennis van God en de Natuur buiten de Openbaring om, nadat door de Reformatie het onfeilbaar Leergezag behoed door de Kerk voor velen disputabel was geworden. Het nieuwe daaruit voortspruitende levensgevoel, het voortschrijdende individualisme, leverde de voedingsbodem voor de Cartesiaanse *Mathesis Universalis,* de methode van het juiste gebruik der menselijke rede, de zekerheid van de overdraagbaarheid van de geometrische denkvormen op het geheel der verschijnselen. Aldus werd het wijsgerig denken gelouterd en de rede vergoddelijkt, terwijl het zelfbewustzijn van de onderzoekende geest tot in het onmetelijke aanzwol.

Dit Cartesianisme vond overtuigde aanhangers in de kring der Jansenisten en in het centrum van hun werkzaamheid, Port Royal. Als meest opvallende en diepste persoonlijkheid, welke uit deze kring is voortgekomen, moet stellig Blaise Pascal worden genoemd, geniaal wiskundige en in wetenschappelijke dingen een rechtzinnig vertegenwoordiger van het Cartesiaanse kennisideaal der mathematische methode. Voor Pascal bezaten de Jansenistische thesen de evidentie en directe bewijskracht van mathematische axioma's. Als geometer kende hij de uitstekende voordelen

van de Euklidische en Cartesiaanse dialectica, maar niet minder goed kende hij haar grenzen. Als theoloog en moraal-philosoof deed hij afstand van haar methode, maar hij bewaarde haar geest. De geometrische denkvorm veranderde hij in een denkstijl, de wetenschap in een kunst. Pascal zal daarom gezien moeten worden als schepper en meester van het nieuwe franse proza, dat, met besnoeiïng van alle rhetorische bijkomstigheden en overdaad, zijn schoonheid vindt in de *adequatio interna* van woord en gedachte [1]).

Voor velen schijnt het, dat er geen grotere tegenstellingen denkbaar zijn, dan die tussen de wiskunde en de kunst. Voor hen vertegenwoordigen deze beide twee door een diepe kloof gescheiden werelden. Aan de ene zijde de wiskunde, de aanbidding van het discursieve verstand, de austeriteit van kille onaandoenlijke formules, een systeem van koude starre syllogismen. Aan de andere zijde de kunst, de innigheid en warmte van al hetgeen het menselijk gemoed kan beroeren: een stille mijmering over weemoedige herinneringen gelegd in een schone melodie, de ontroering gewekt door de uit emotie geboren uiting van het gevoel in woorden, klanken, kleuren en vormen.

Maar, geachte toehoorders, als zo vaak, ook hier bedriegt de schijn; hechte banden verbinden de wiskunde met de kunst. Reeds van de vroegste tijden af heeft men een verwantschap waargenomen tussen de wiskunde en de muziek en golden geometrische vormen als de belichaming van de schoonheidsidee. Van den Pythagoraeër Archytas van Tarente is een fragment bewaard gebleven, dat aldus luidt:

„Het schijnt mij toe, dat de wiskundigen schone inzichten verkregen hebben, en het is geen wonder, dat ze over de afzonderlijke dingen, zoals ze werkelijk zijn, het juiste begrip hebben. Want, daar ze over de natuur van het Heelal de ware kennis hebben verkregen, sprak het vanzelf, dat ze ook over de aard der afzonderlijke dingen het juiste inzicht verwierven. Dientengevolge hebben ze ons dan ook over de snelheid van de sterren en hun opkomst en ondergang een duidelijke kennis overgeleverd en evenzo over geometrie, arithmetica en de astronomie en niet het minst over de muziek. Want deze wetenschappen schijnen vermaagschapt te zijn. Want ze hebben het met de beide innig verwante oergestalten van het Zijnde te doen...." [2]).

---

1) Vgl. Leonardo Olschki, Der geometrische Geist in Literatur und Kunst, Deutsche Vierteljahrsschrift für Literaturwissenschaft und Geistesgeschichte 8 (1930), 516—538.

2) Wilhelm Capelle, Die Vorsokratiker, p. 484.

In de school van Pythagoras, wellicht door den stichter zelf, deed men de fundamentele ontdekking van de elementaire harmonische verhoudingen in de acoustiek, het *octaaf*, de *quint* en de *quart*. Deze verhoudingen staan in een opmerkelijk verband tot de *tetraktys*, de rij van de eerste vier gehele getallen, waarvan de som juist de *dekade* is en die de hoeksteen is van de Pythagoraeïsche getallenleer. En — zo deelt Aristoteles ons mede [1]) — langs die weg kwamen de Pythagoraeërs tot het inzicht, dat harmonie rust op proportie; harmonie is niets anders dan een bizondere relatie tussen getallen. De getallen drukken het wezen der dingen uit.

De poëtisch gekleurde traditie verhaalt ons, hoe de Pythagoraeërs tijdens hun tochten op de zeeën rondom Zuid-Italië en Sicilië de wijde en donkere met sterren bezaaide hemel aanschouwden en hoe zij de afstanden van die ver verwijderde lichten in overeenstemming poogden te brengen met de getallen. En zij overwogen, dat door de beweging van die geweldige lichamen een gedruis moest worden veroorzaakt van boven alle begrip gaande sterkte. Ten gevolge van de verschillende afstanden van de hemellichamen tot het middelpunt van de Kosmos komen hun snelheden overeen met de getalverhoudingen der muzikale harmonie. De rondgaande beweging van de sterren veroorzaakt een machtige hemelse muziek, de harmonie der sferen, onhoorbaar voor den gewonen sterveling, omdat hij reeds van zijn geboorte af aan de klank gewend is, gelijk ook de kopersmeden door de voortdurende gewoonte het geluid van hun hamers niet meer horen.

De traditie schrijft eveneens aan de Pythagoraeërs de ontdekking toe van de regelmatige veelvlakken, die merkwaardige door regelmatige driehoeken, vierhoeken of vijfhoeken begrensde figuren — en vermoedelijk zal die traditie wel voor een deel steunen op het feit, dat Plato den Pythagoraeër Timaios een rede over het ontstaan en de bouw van de wereld laat houden. Op historische gronden is het evenwel waarschijnlijker, dat de in de tijd van Plato levende mathematicus Theaithetos voor het eerst een exacte kennis van de eigenschappen van die figuren heeft bezeten en dat vrij stellig de ontdekking van het achtvlak en het twintigvlak op zijn naam moet worden gesteld [2]). De regelmatige veelvlakken, vijf in aantal, vervullen een belangrijke rol bij de beschrijving van de Kosmos in de „Timaios". De bouw van de wereld

---

1) Aristoteles, De Coelo II 9. Vgl. Wilhelm Capelle, op. cit. p. 491.
2) E. J. Dijksterhuis, De Elementen van Euclides I, p. 12.

kan begrepen worden door de beschouwing van geometrische figuren en de vijf regelmatige veelvlakken dienen als zinnebeeld en vorm van de kosmische structuurelementen. Als de schoonste lichamen, onderling verschillend, maar die uit elkaar kunnen voortkomen bij het uiteenvallen van sommige hunner, moeten de elementen aarde, vuur, lucht en water gedacht worden. De vorm van de kleinste deeltjes van het scherpste en lichtste der elementen, het vuur, moet die zijn van het scherpste der veelvlakken met het kleinste aantal zijvlakken, dus het door vier driehoeken begrensde tetraëder. Aan de structuur van de minder beweeglijke lucht beantwoordt de vorm van het door acht driehoeken begrensde octaëder, terwijl het veelvlak met het grootste aantal zijvlakken, het door twintig driehoeken begrensde icosaëder, de vorm weergeeft van de kleinste bestanddelen van het water. De aarde is het minst beweeglijke van alle stofsoorten en van de lichamen datgene, dat het best een bepaalde vorm aanneemt, zodat dit noodzakelijkerwijze de minst wankelbare zijvlakken moet hebben. Vandaar dat aan het element aarde de vorm van het hexaëder, de kubus, moet worden toebedeeld.

Er bestaat nog een vijfde samenstel van vlakke figuren, het dodecaëder, het veelvlak opgebouwd uit twaalf regelmatige vijfhoeken, dat God zich ten nutte maakte voor het Al, toen hij dit volledig in tekening bracht.

Twintig eeuwen later ontmoeten wij die elfde regelmatige veelvlakken weer, wanneer de grote mathematicus en astronoom K e p l e r, van wien men moeilijk kan zeggen of hij meer geleerde dan wel kunstenaar was, zijn denkbeelden over de bouw van de wereld openbaar maakte. De genius had hem ingegeven, dat de diepste grond voor het bestaan van zes planeten gelegen is in het bestaan van juist vijf regelmatige veelvlakken, die met de vijf tussenruimten van die planeten corresponderen. En hoewel K e p l e r de harmonie der sferen volgens de Pythagoraeïsche opvatting verwierp, bestond er ook volgens hem een innig verband tussen de muziek en de astronomie. In afwijking tot zijn Griekse voorgangers verbond hij aan een planeet niet een enkele toon, doch een interval, dat bepaald wordt door de verhouding van de grootste en de kleinste snelheid van de planeet in haar baan. Met de planeet Mars bijvoorbeeld wordt het interval van de quint in verband gebracht. Deze beschouwingen mogen misschien op ons de indruk maken van wonderlijke fantasieën, zij gaven aan K e p l e r de sleutel tot de ontdekking van zijn beroemde derde wet, de harmonische wet: De verhouding van de derde macht van de gemid-

delde afstand van een planeet tot de zon en het quadraat van haar omloopstijd is voor alle planeten dezelfde. In lyrische bewoordingen geeft Kepler uiting aan zijn vreugde over de na bijna bovenmenselijke inspanning verkregen resultaten. In de voorrede tot het vijfde boek van de „Harmonices Mundi" schrijft hij:

„Nadat na verloop van achttien maanden het eerste licht, na drie maanden het volle daglicht, na weinige dagen de zon zelf van bewonderenswaardige beschouwing in volle glorie haar licht heeft verspreid, sindsdien houdt niets mij meer terug, lust het mij toe te geven aan een heilige geestdrift, lust het mij de mensen te tarten door een openhartige bekentenis, dat ik de gouden vazen der Egyptenaren roof, om voor mijn God daaruit een tabernakel te bouwen, ver van de grenzen van Egypte. Als gij mij dat vergeeft, zal ik mij verheugen, indien gij toornt zal ik het verdragen; ziet, ik werp de teerling en schrijf een boek, dat hetzij door mijn tijdgenoten, hetzij door mijn nakomelingschap gelezen kan worden, mij is dat om het even; laat dit boek honderd jaar op zijn lezer wachten, daar God zelf zes duizend jaar op zijn beschouwer heeft gewacht.".[1])

Geachte toehoorders! Slechts met moeite kan ik weerstand bieden aan de verleiding om tot U te spreken over de wisselwerking tussen de wiskunde en de beeldende kunsten, met name de schilderkunst van het quattro-cento. Ik zou dan de gelegenheid hebben nader in te gaan, eensdeels op de beïnvloeding van de stijl door de geometrie, anderdeels op de revolutionaire omwenteling, die in de meetkunde als gevolg van de ontwikkeling van de perspectief plaats greep en waaruit een geheel nieuwe en uitermate belangrijke tak van de wiskunde is voortgekomen, de projectieve meetkunde. Ook de mystiek zou dan terloops aan de orde gesteld kunnen worden. Ik denk hierbij aan de *Divina Proportione* van den ten tijde van Leonardo da Vinci levenden minderbroeder Luca di Pacioli, die in de reeds door Eudoxos bestudeerde „snede" — de verdeling van een lijnsegment in twee delen, waarvan het ene middelevenredig is tussen het andere deel en het gehele seg-

[1]) J. Kepler, Opera omnia V, p. 269 (Ed. Frisch), Jam postquam a mensibus octodecim prima lux, a tribus dies justa, a paucissimis vero diebus Sol ipse merus illuxit contemplationis admirabilissimae, nihil me retinet, lubet indulgere sacro furori, lubet insultare mortalibus confessione ingenua, me vasa aurea Aegyptiorum furari, ut Deo meo tabernaculum ex iis construam, longissime ab Aegypti finibus. Si ignoscitis, gaudebo, si succensetis, feram; jacio en aleam librumque scribo seu praesentibus seu posteris legendum, nihil interest; expectet ille suum lectorem per annos centum, si Deus ipse per annorum sena millia contemplatorem praestolatus est.

ment — een symbool zag van de Triniteit. Ik zou voorts kunnen spreken over de invloed van de meetkunde op de toegepaste kunst, bijvoorbeeld op welke wijze de Venetianen naar parabolische lijnen de omtrek van hun bokalen vormden. Maar het onderwerp is onuitputtelijk en ik moet mij een rigoureuze beperking opleggen. Ik wil er mee volstaan vast te stellen, dat door de eeuwen heen de wiskunde steeds zeer nauwe relaties met de kunst heeft onderhouden. En daarmee zien we ons voor een belangwekkende vraag geplaatst. Waaraan is de wederzijdse beïnfluencering van de wiskunde en de kunst toe te schrijven? Kan er misschien sprake zijn van een innerlijke verwantschap tussen deze beide uitingen van de menselijke geest?

Het antwoord op deze vraag is zonder enig voorbehoud bevestigend. Ook in de wiskunde is schoonheid de stimulans voor de gedachte, de wiskundige waarheid wenst zich te hullen in een schoon gewaad. Zodra wij ons gaan bezinnen op de aard en het wezen van de wiskunde, dan zullen zeer stellig epistemologische problemen onze aandacht opeisen, en zonder twijfel zal de ontologie van het wiskundig object in het centrum staan van onze belangstelling. Maar we zouden het ware karakter van de wiskunde miskennen, wanneer we geen oog zouden hebben voor dié wezenstrekken, welke haar met recht tot een schone kunst bestempelen. Wiskunde is behalve wetenschap ook kunst en de waarachtige wiskundige is tevens kunstenaar.

In de zuivere kunst staat men onverschillig tegenover practische vraagstukken, ook wanneer het objecten betreft, die als gebruiksvoorwerp kunnen dienen. Evenzo wordt in de wiskunde de creatieve impuls niet aan banden gelegd door utiliteitsoverwegingen. De waarde van een mathematische ontdekking wordt niet in de eerste plaats beoordeeld naar de practische toepasbaarheid, ook niet wanneer de probleemstelling uit de practijk is voortgekomen. Eén van de grootste vertegenwoordigers van de getallentheorie in de negentiende eeuw, Kummer, moet eens bij een bepaalde gelegenheid de opmerking gemaakt hebben, dat hij van al zijn ontdekkingen die van de ideale getallen het hoogst waardeerde, omdat hem daarvan geen enkele practische toepassing bekend was. Louter en alleen aesthetische motieven stimuleren de activiteit van den wiskundige. Maar de schoonheidsbeleving, welke de beoefening van de wiskunde begeleidt, de passie voor het abstracte en constructieve, is voor den buitenstaander zeer moeilijk aan te voelen. Evenals voor den niet-religieus aangelegde de godsdienstige vervoering, de vreugdevolle onderwerping van de eigen wil aan die

van God, volmaakt onbegrijpelijk is, zo is ook de schoonheid van de wiskunde in volle omvang slechts toegankelijk voor hem, die zich in volledige overgave aan haar wil wijden. In een brief aan Sophie Germain schrijft Gauss, de princeps mathematicorum: „Le goût pour les sciences abstraits en général et surtout pour les mystères des nombres est fort rare: on ne s'en étonne pas; les charmes enchanteurs de cette sublime science ne se décèlent dans toute leur beauté qu'à ceux qui ont le courage de l'approfondir" [1]).

Bij diepere ontleding van het thema der wiskundige aesthetica stuiten we op een aantal aspecten, waarvan de meest opvallende zijn de *mathematische taal* en de *structuur*. Gelijk Praxiteles uit marmer een Hermes-beeld vormde, zo gebruikt de wiskundige de taal voor de vormgeving van zijn ideeën. Maar het is niet de gewone omgangstaal, het is een geformaliseerde taal, die in rijke verscheidenheid van symbolen gehanteerd wordt. De uiterste beknoptheid en concisie, die zo zeer de moderne wiskunde kenmerken, zijn slechts bereikbaar geworden dank zij een zorgvuldig afgewogen formalisme. Het uitgebreide en volledige gebruik van de symbolentaal is een van de redenen, waarom men niet de wiskunde zo veel kan bereiken. De grote vlucht, welke de infinitesimaalrekening sinds Leibniz heeft genomen en haar veelzijdige toepassingsmogelijkheden zowel in de natuurkunde als in de ingenieurswetenschappen, zijn voor een allerbelangrijkst deel het gevolg van de geniaal gevonden notatie. Het uiterst verfijnde formalisme van de tensorrekening heeft Einstein in staat gesteld de gravitatietheorie te ontwikkelen. Hoewel de door de tekens gedragen ideeën primair zijn, zal toch de wiskundige ook aan zijn symbolentaal de uiterste zorg besteden, evenals de prozaschrijver zijn gedachten en gevoelens wenst weer te geven in sierlijk gekozen bewoordingen.

Ieder kunstwerk bezit een bepaalde structuur, die echter op velerlei wijze, al naar de aard van het gebruikte materiaal, gerealiseerd wordt. In de dichtkunst kennen we structuurvormen als sonnet en ballade, in de toonkunst ontmoeten we ze als sonate en symphonie. Geheel analoog bezit iedere mathematische theorie een eigensoortige bouw, die gegeven is door het stelsel der aan de theorie ten grondslag gelegde axioma's. De verschillende concretiseringen van een abstract axiomastelsel voeren tot onderling isomorfe theorieën. De opsporing van de gemeenschappelijke abstracte kern in ogenschijnlijk ver uiteenliggende gebieden bezit een geheel

[1]) Gauss, Werke X, 1, p. 70.

eigen charme en bevredigt in hoge mate de aesthetische zin. Maar ook voor de toepassing is het belangwekkend, dat geheel verschillende probleemgebieden met gebruikmaking van eenzelfde mathematisch formalisme beheerst kunnen worden. De electrische stroom in een magnetisch veld en de nabij het draagvlak van een vliegtuig tijdens de vlucht optredende wervels, kunnen met hetzelfde wiskundige apparaat behandeld worden. De stormachtige ontwikkeling van de atoomphysica was mogelijk, omdat de daarvoor noodzakelijke wiskundige hulpmiddelen in andere onderdelen der physica reeds bereid lagen.

De wiskunde en de aesthetica naderen elkaar het dichtst in de groepentheorie, wellicht het meest diepzinnige en meest subtiele onderdeel van de mathematische wetenschap. Deze theorie van symmetrieën en isomorfismen, van structuurschema's en compositievoorschriften overtreft in universele kracht en metaphysische diepte verre de getallenleer. Hoewel pas een eeuw geleden ontdekt, is het phaenomeen der groepentheorie even oud als alle grote oorspronkelijke activiteiten der menselijke samenleving. Het ordenende beginsel der groepen kunnen we terugvinden in de taal der poëzie, maar ook in de bouw der kristallen. Dit beginsel treedt ons tegemoet in de schone regelmatigheden der ornamenten, waarmede Moorse kunstenaars hun moskeeën verluchtten en in de middeleeuwse kerkramen legt het een heerlijk getuigenis af van de genialiteit van hun ontwerpers. Het is ditzelfde beginsel, waarop de indrukwekkende schoonheid berust van de fuga's van Bach.

„Denken wij een ogenblik — zo zegt ergens Prof. Balth. van der Pol — aan Bach's orgelfuga's of de fuga's uit het Wohltemperiertes Klavier. Steeds wordt eerst het karakteristieke, alles dominerende thema (dux) gebracht. Soms zelfs twee of drie thema's. Dan komt het antwoord (comes) in de bovendominant, dat is een herhaling van het thema, een quint hoger; daarop volgt gewoonlijk het oorspronkelijke thema opnieuw in een andere stem, dat vervolgens wederom beantwoord wordt. Dan komt de „inschuiving", waarin het thema en het antwoord in verschillende stemmen bijna gelijktijdig herhaald worden, doch met veel kleiner tijdsverschil. Vaak volgen dan ook „verkleining" en „vergroting", d.w.z. het tegen elkaar leggen in verschillende stemmen van het thema in het oorspronkelijke rhythme tegen datzelfde thema met een verdubbeld of gehalveerd rhythme. Niet zelden brengt de meester daarop het thema in gespiegelde vorm, d.w.z. elke sprong daarin naar boven wordt een sprong naar beneden en omgekeerd. Deze transformaties van het thema vindt men in allerlei combinaties en

permutaties in verschillende stemmen zodanig dooreengestrengeld, dat één imposant geheel ontstaat, dat meestal via een groot opgezette climax in brede slotaccoorden zijn voleinding vindt." [1])

Een fraai voorbeeld van een geometrisch analogon van de fuga is het beroemde hexagramma mysticum. Het grondthema van deze fuga — als ik de beeldspraak nog even mag volhouden — is een reeds door Desargues, een der grondleggers van de projectieve meetkunde, bestudeerde figuur. Deze verkrijgen we, wanneer we ons in het platte vlak twee driehoeken denken, waarvan we de hoekpunten zodanig met elkaar kunnen laten corresponderen, dat de drie verbindingsrechten van corresponderende punten door één enkel punt gaan. Dergelijke driehoeken noemt men *perspectief gelegen;* het gemeenschappelijke punt van de drie verbindingsrechten heet het *perspectiviteitscentrum.* Noemen we de zijden van de driehoeken, die telkens tegenover corresponderende hoekpunten liggen, ook corresponderend, dan blijkt, dat de corresponderende zijden elkaar in de punten van eenzelfde rechte snijden, de *perspectiviteitsas.* Op deze wijze ontstaat een figuur bestaande uit 10 punten en 10 rechten; op elke rechte liggen 3 punten en door elk punt gaan 3 rechten van de figuur. Er heerst in deze figuur een 10-voudige symmetrie, aldus te verstaan: alle punten zijn volkomen gelijkwaardig in die zin, dat ieder punt als perspectiviteitscentrum van twee passend gekozen driehoeken kan fungeren, terwijl eveneens iedere rechte de rol van perspectiviteitsas kan vervullen. Maar bovendien kan men nog de punten en de rechten van rol laten verwisselen, zonder dat de figuur wezenlijk anders wordt. De beschreven figuur is de *configuratie van* Desargues.

Na deze voorbereidende beschouwing ga ik over tot de bespreking van de befaamde stelling, die Pascal in 1640 op zestienjarige leeftijd publiceerde. Op een kegelsnede — wij mogen bijvoorbeeld aan een cirkelomtrek denken — nemen we willekeurig 6 punten aan. In een bepaalde volgorde genomen kunnen we ze door 6 rechten verbinden, die een z.g. enkelvoudige zeshoek vormen. De stelling van Pascal zegt, dat de overstaande zijden van die zeshoek elkaar in punten snijden, welke op één rechte liggen, de bij de zeshoek behorende *rechte van* Pascal. Natuurlijk kan men de volgorde der aangenomen punten op tal van wijzen variëren. Een eenvoudig onderzoek brengt aan het licht, dat uit 6 gegeven hoekpunten in totaal 60 verschillende enkelvoudige zeshoeken

[1]) Balth. van der Pol, Harmonische Muziek, Archives du Musée Teyler 9 (1942), p. 508.

kunnen worden verkregen, welke dus 60 rechten van Pascal opleveren. Het totale aantal verschillende zijden van al die zeshoeken bedraagt 15 en buiten de hoekpunten hebben ze nog 45 punten gemeen, de z.g. *punten van* Pascal. De punten van Pascal en de rechten van Pascal vormen een ingewikkeld systeem van 45 punten en 60 rechten, waarbij op iedere rechte 3 punten liggen, terwijl bovendien blijkt, dat door ieder punt 4 rechten gaan. Deze figuur, de *configuratie van* Pascal, wordt door haar talrijke en verrassende eigenschappen genoemd het *hexagramma mysticum.* Met deze figuur zijn een groot aantal bizondere punten en rechten verbonden, die telkens de naam dragen van den geometer, die het eerst op hun bestaan heeft gewezen.

Misschien komt bij U de wens op deze figuur eens werkelijk getekend voor U te zien. Wanneer U dan zou denken op die wijze iets te weten te kunnen komen van de bizonderheden van de figuur, moet ik U teleurstellen. Geheel andere middelen zijn nodig om dit gecompliceerde net van punten en lijnen te ontwarren. Ten einde de bouw van het hexagramma te doorgronden, richten we onze aandacht op de 15 verbindingslijnen der 6 gegeven punten. Een eenvoudige berekening leert, dat men daarmee in totaal ook 15 driehoeken kan samenstellen. We zullen zeggen, dat twee van die driehoeken een *dyade* vormen, indien zij geen zijde gemeenschappelijk hebben. De stelling van Pascal blijkt nu hierop neer te komen: de beide driehoeken van een willekeurige dyade zijn perspectief en hun perspectiviteitsas is een rechte van Pascal. Elke driehoek heeft met 6 andere een zijde gemeen en kan dus met de 8 overblijvende telkens tot een dyade aangevuld worden. Het aantal der dyaden bedraagt bijgevolg $\frac{1}{2} \times 8 \times 15 = 60$, dat is juist het aantal rechten van Pascal.

Een drietal driehoeken, die twee aan twee een dyade vormen, heet *triade.* We willen nu eens van een bepaalde dyade uitgaan. Daartoe behoren 6 van de 15 verbindingslijnen. Uit de 9 overblijvende kunnen we op slechts één wijze een triade samenstellen, die bijgevolg door de gegeven dyade ondubbelzinnig is bepaald. Een dyade en de daardoor bepaalde triade leveren tezamen 5 driehoeken, een *pentade.* In eenzelfde pentade kunnen we de driehoeken paarsgewijs tot 10 dyaden samenvoegen; er zijn dus ook 10 triaden in eenzelfde pentade. Het totale aantal dyaden, we weten het reeds, bedraagt 60, waarvan er telkens 10 tot eenzelfde pentade behoren.

Deze door Veronese bedachte groepering van de driehoeken blijkt uitermate nuttig te zijn voor het onderzoek van het hexagramma. We zagen reeds dat met een dyade een rechte van

P a s c a l correspondeert. Bij een pentade behoren dus 10 rechten van P a s c a l. Voorts kan men aantonen, dat de driehoeken van eenzelfde triade perspectief zijn met een gemeenschappelijk perspectiviteitscentrum. In dit geval blijken de perspectiviteitsassen door één punt te gaan, dat *punt van* K i r k m a n genoemd wordt. Door een punt van K i r k m a n gaan steeds 3 rechten van P a s c a l, terwijl het onderzoek leert, dat op een rechte van P a s c a l steeds 3 punten van K i r k m a n liggen. De rechten van P a s c a l en de punten van K i r k m a n, behorende bij eenzelfde pentade, vormen een configuratie van D e s a r g u e s. In het geheel zijn er dus 6 configuraties van D e s a r g u e s aan te wijzen, voortgebracht door de 6 pentaden en te vergelijken met de bladen van een mysterieuze rozet.

Het zou mij te ver voeren indien ik dieper zou ingaan op de talloze eigenschappen van het hexagramma. Want waarlijk, het is een geheimzinnig spel van lijnen en punten, een kaleidoscoop van configuraties. En heel dit magische weefsel wordt voortgebracht door de eenvoudigst denkbare figuur, de rechte lijn!

De voor de ontwarring van de P a s c a l-figuur zo belangrijke indeling van 15 objecten in 6 pentaden staat niet op zich zelf. Geheel overeenkomstige beschouwingen voeren tot resultaten bij de studie van een derdegraads hyperoppervlak in de vierdimensionale ruimte, het z.g. hyperoppervlak van S e g r e, dat bij de studie van de lijnenmeetkunde in de vierdimensionale ruimte een centrale plaats bekleedt. Maar ook bij het icosaëder kan men analoge bizonderheden opmerken. Er zijn nl. 15 de 30 ribben halverende middellijnen. Telkens liggen er 5 in één vlak, dat loodrecht staat op een twee diametraal gelegen hoekpunten verbindende rechte. Er zijn 6 van dergelijke rechten, daar het aantal hoekpunten 12 bedraagt. Door deze en soortgelijke eigenschappen is de reeds door T h e a i t h e t o s bestudeerde figuur weer in het centrum van de belangstelling komen te staan, doordat deze figuur kan dienen om abstruse theorieën, waarbij een pentadenindeling een rol vervult, voor de aanschouwing toegankelijk te maken. Want ook buiten de meetkunde kunnen we dit indelingsbeginsel ontmoeten, bijvoorbeeld in de theorie der thêta-functies. Daarmee hangt ten nauwste samen de theorie van de oplossing van de vergelijking van de vijfde graad, welke vooral door de studie van het icosaëder tot een wondermooi onderdeel van de wiskunde is uitgegroeid [1]). Een recente toepassing van het icosaëder is de aan-

[1]) F. Klein, Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen fünften Grades.

schouwelijke illustratie van een door Eddington gegeven theorie van de differentiaalvergelijking van Dirac, die de gedragingen beschrijft van een der elementaire bouwstenen der materie, het electron[1]). Met deze differentiaalvergelijking is een systeem van 15 operatoren verbonden, die men evenals de driehoeken van het hexagramma of de middelloodlijnen van het icosaëder in pentaden kan indelen. Op die wijze is het mogelijk om tal van physische grootheden aanschouwelijk geometrisch te interpreteren, maar op principiëel andere wijze, dan in de klassieke physica geschiedde. Als we dit alles bedenken en overzien, zullen we onwillekeurig met Faust willen uitroepen: „Wie alles sich zum Ganzen webt, Eins in dem andern wirkt und lebt!"

Gelijk ieder artistiek systeem is ook elke wiskundige theorie in bepaalde zin teleologisch. Daarmee beweer ik niet, dat de wiskunde een doel buiten zich zelf moet hebben, evenmin als men dit van de kunst zou mogen zeggen — hoewel natuurlijk de wiskunde doelmatig zijn kan en dat ook meermalen op indrukwekkende wijze heeft doen blijken. Maar wanneer we van een doelgerichtheid spreken, willen we te kennen geven, dat ieder onderdeel dusdanig met een ander samenhangt, dat men van het ene op het andere kan overgaan. In de wiskunde wordt deze samenhang door de logica geconstitueerd. De mate, waarmee met het teleologisch beginsel rekening wordt gehouden, bepaalt de aesthetische waarde van de theorie. Reeds Euklides ging volgens dit principe te werk, toen hij in de „Elementen" de eerste 28 stellingen ging bewijzen zonder gebruikmaking van het parallelenaxioma. Daarmee was feitelijk al de stoot gegeven tot de ontwikkeling van wat men veel en veel later de niet-Euklidische meetkunde zou noemen. Pas Johann Bolyai wist aan de hoogste aesthetische eisen te voldoen, doordat hij zo uitvoerig mogelijk alle consequenties onderzocht, welke uit die 28 stellingen voortvloeien en daarmee de z.g. *absolute meetkunde* schiep. De moderne algebra en de groepentheorie hebben van meet af aan het teleologisch beginsel als opperste norm geproclameerd. Het is de *zuiverheid van methode*, die aan deze onderdelen van de wiskunde één zeer bizondere bekoorlijkheid verleent. Van de meetkunde is in dit opzicht het meest volmaakte onderdeel de projectieve meetkunde.

Ook op andere wijze heeft deze doelgerichtheid de gang van het onderzoek beïnvloed. Een tijd lang scheen het of de Westerse wiskunde, vooral sinds Descartes, op weg was naar een volledige

---

1) G. Haenzel, Die Diracsche Wellengleichung und das Ikosaeder, Journal für die reine und angewandte Mathematik 183 (1941), 232—242.

arithmetisering. Een universeel en systematisch ontwikkeld getalbegrip eiste het alleenrecht van wiskundige existentie voor zich op; alle andere begrippen zouden hieruit moeten worden gededuceerd. Het lijkt er op, dat aan deze suprematie een einde is gekomen. Ieder probleemgebied voert een eigen voor dit gebied karakteristiek getallensysteem met zich mede. De moderne geometer knoopt wederom aan bij de gedachtengang van zijn grote Griekse voorgangers als Eudoxos, natuurlijk verrijkt met de ervaring van tientallen eeuwen van onderzoek.

En zo leeft en bloeit de wiskunde in schone verbondenheid met het verleden; haar problemen zijn niet gebonden aan plaats en tijd. Zij ontleent haar universele kracht niet aan de toevallige wisseling der omstandigheden, maar vindt haar diepste grond in het eeuwige heimwee naar schoonheid en waarheid. Ongenaakbaar voor hen, die haar niet beminnen, liefelijk en charmant voor hem, die zich in volledige overgave aan haar wijdt, leeft de wiskunde voort in de objectieve geest. Uit primitieve en alledaagse ervaringen opgebloeid, door de edelste geesten uit het verleden bezield, is de wiskunde een andere werkelijkheid, die ons de misère en banaliteit van ons bestaan doet vergeten. Zij heft ons op uit bekommernis en triestheid, doordat zij onze geest kan doen verwijlen in ruimten, die geen menselijke voet ooit zal betreden, en onze ziel kan verlustigen in harmonieën, die geen oor ooit zal beluisteren. In haar objectieve en onvergankelijke waarheid, voor zover deze bereikbaar is voor het menselijke verstand, vertegenwoordigt de wiskunde het beste en het hoogste van hetgeen de mensheid aan natuurlijke bezittingen kan verwerven. In haar volmaakte schoonheid en orde is zij een weerspiegeling van den Eeuwige.

EENIGE BESCHOUWINGEN OVER DE WAARDE DER WISKUNDE

door

Dr N. G. DE BRUYN [1]).

Voor de derde maal in dit jaar maakt een mathematicus bij het aanvaarden van het ambt van gewoon hoogleeraar aan de Technische Hoogeschool gebruik van het recht of zoo men wil, onderwerpt hij zich aan de plicht, tot het uitspreken van een rede. S. C. van Veen benutte deze gelegenheid door het houden van een betoog over de voor deze Hoogeschool zoo belangrijke wisselwerking tusschen zuivere en toegepaste wiskunde. Visser liet U op duidelijke en leerzame wijze de evolutie zien van een fundamenteel wiskundig begrip: het getalbegrip. Nu wordt ten derde male Uw welwillende aandacht gevraagd voor een oratie over de wiskunde. Evenmin als mijn voorgangers zal ik U lastig vallen met een wiskundig betoog, bestaande uit het trekken van reeksen van logische conclusies uit van te voren nauwkeurig geformuleerde onderstellingen, aangezien dit onmogelijk in den vorm van een rede kan worden gegoten. Het zou van de toehoorders eischen dat zij zich bij elken stap een nauwkeurig beeld zouden vormen van de daarbij gebruikte voorafgaande stappen, en bij het denken daaraan tegelijk den volgenden stap in zich zouden kunnen opnemen. Dat van studenten op een college wèl wordt gevraagd een wiskundig betoog te volgen is ten duidelijkste een andere kwestie: daar maakt een voordracht deel uit van een volledigen cursus, er wordt van een bord gebruik gemaakt om allerlei resultaten tijdelijk vast te leggen, het gehoor is homogeen wat leeftijd en vooropleiding betreft, en bovendien is er eenig contact mogelijk tusschen de beide betrokken partijen.

Ook het geven van een overzicht over de recente ontwikkeling van den een of anderen tak der wiskunde is weinig geschikt voor een gelegenheid als deze. Zelfs wanneer het toegepaste wiskunde betrof zou ik niet op Uw aller belangstelling kunnen rekenen. Hetzelfde geldt in zekere mate voor historische of biografische beschouwingen.

[1]) Rede, uitgesproken bij de aanvaarding van het ambt van hoogleeraar in de zuivere en toegepaste wiskunde en de theoretische mechanica aan de Technische Hoogeschool te Delft op 26 Nov. 1946.

U wilt mij dus ten goede houden, dat ik in dit uur het betoog in algemeene banen houd, de wiskunde van verschillende kanten belicht en aan een, vanzelfsprekend subjectieve, waardebeoordeeling onderwerp. Daarbij zal ik allerminst streven naar originaliteit, en nog minder naar volledigheid. Ik zal het daarbij niet uitsluitend, en ook niet in de eerste plaats hebben over het *practische nut* der mathesis, doch algemeen de wiskunde als cultuurfactor ter sprake brengen.

Een aantal jaren geleden werd in een toenmaals nog bevriende staat de slagzin gelanceerd: „Wenn ich das Wort Kultur höre, greife ich schon nach dem Revolver". Er is een tijd geweest dat vele technici een dergelijke houding aannamen, hoewel vreedzamer instrumenten zooals rekenlinealen en ampèremeters daarbij de plaats van de revolver innamen. Er zijn allerlei teekenen die er op wijzen, dat heden ten dage een andere houding tegenover cultuur wordt aangenomen, zoodat ik het waag in Uw midden de woorden wiskunde en cultuur met elkaar in verband te brengen.

Wanneer Huizinga in zijn bekende boek „De schaduwen van morgen" de ernstigste kwalen van dezen tijd aanwijst, brengt hij in het bijzonder de volgende vier naar voren: de algemeene verzwakking van het oordeel, de daling van de critische behoefte, de verzaking van het kennisideaal en het verval der moreele normen. Hoewel het van een diepgaande onnoozelheid zou getuigen, wanneer iemand hier de beoefening der wiskunde als panacee aanbeval, wil ik niet nalaten er op te wijzen dat zij nochtans tegenover enkele dezer kwalen een positieve geaardheid kan opleveren en dat het daarom niet volslagen onzinnig is de mathesis met het groote woord cultuurfactor te bestempelen. Afgezien hiervan is dit woord reeds gerechtvaardigd op grond van het feit dat de wiskunde in voortdurende wisselwerking staat met wetenschap en techniek, die althans voor het uiterlijke aanzien van de wereld van vandaag voor een groot gedeelte verantwoordelijk zijn. De wiskunde kan, althans gedeeltelijk, worden *toegepast*. Hieraan denken wij, wanneer we over haar *practische nut* spreken.

Ik noem nog drie andere positieve waarden op grond waarvan zij aanspraak maakt op een eereplaats in onze cultuur: zij kan de bevrediging beteekenen van den drang naar onbetwistbare kennis, zij bezit duidelijk aanwijsbare schoonheidselementen, en zij is een belangrijk hulpmiddel bij de opvoeding der menschheid wat het aanleeren van doelmatige denkgewoonten betreft. Afgezien van deze laatste, de *vormende waarde*, zijn dit ook de waarden, die aangeven waarom men zich met wiskunde bezighoudt; de vormende waarde is een van de belangrijkste beweegredenen om wiskunde aan anderen

te onderwijzen. Terloops dien ik op te merken, dat de belangrijkste beweegreden waarom men zich met wiskunde in den een of anderen vorm bemoeit, in vele gevallen eenvoudig bestaat uit het feit, dat men er als verplicht leervak op een school mee te maken heeft. Wanneer echter de eerder genoemde motieven hier op den duur geen rol bij gaan spelen kan men moeilijk spreken van met vrucht doorloopen onderwijs.

Laten wij beginnen met een korte beschouwing over de eerstgenoemde waarde, den drang naar onbetwistbare kennis.

Huizinga noemt de verzaking van het kennisideaal een ernstige kwaal van dezen tijd. Wie het niet meer noodig acht dingen te weten, die niet beslist uit utiliteitsoverwegingen geweten *moeten* worden, is geestelijk dood. Het proces van het zich afvragen en willen weten is een van de meest fundamenteele levensverrichtingen van den mensch. Dit kennisideaal is een teere plant, die zorgvuldig onderhoud vraagt.

De drang naar *nuttige* kennis is niet in de eerste plaats drang naar kennis, maar naar nut. De drang naar *onbetwistbare* kennis daarentegen is de zuiverste vorm van den drang naar kennis om de kennis zelve.

Of wiskunde onbetwistbare kennis kan vertegenwoordigen, is natuurlijk niet direct met een volmondig „ja" te beantwoorden. De termen „wiskunde", „onbetwistbaar" en „kennis" zouden eerst zeer nauwkeurig moeten worden omschreven en daarna zouden we de vraag misschien kunnen reduceeren tot een psychologisch probleem, of misschien tot een schijnprobleem. Wèl kunnen we twee dingen constateeren: de *drang* naar onbetwistbare kennis komt bij de beoefening der wiskunde tot uiting, en in de tweede plaats: àls er in eenige wetenschap eenig onbetwistbaar feit bestaat, dan is dat in de wiskunde. Geen uitspraak op physisch, biologisch of historisch terrein kan worden gelanceerd met de zekerheid die we hebben bij de uitspraak van de bewering „twee maal zes is drie maal vier". Of dit laatste nu een ervaringsfeit is dan wel een bewezen eigenschap of een taalregel, laat ik hier in het midden. Een feit is echter, dat er alleen maar aan getwijfeld kan worden door lieden die bij wijze van tijdverdrijf aan alles twijfelen.

Huizinga constateert dat het kennisideaal niet meer in tel is, en betreurt dit. Hij schrijft het hoofdzakelijk toe aan overlading: sinds enkele eeuwen is het niet meer mogelijk ook maar een globaal overzicht te hebben van alle dingen, die de moeite van het bestudeeren

waard zijn. Deze wetenschappelijke rijstebrijberg werkt verlammend op de geestelijke eetlust. Op den duur geven degenen die zich door den berg heeneten met het doel, om aan den anderen kant, in het Luilekkerland der absolute kennis, te komen den moed op, en hun taak wordt overgenomen door lieden die tegenover dat Luilekkerland betrekkelijk onverschillig staan, doch alleen maar doorgaan, omdat ze erg veel van rijst houden.

Ik geloof niet dat een dergelijke verschuiving van motieven ernstige gevolgen heeft. Het eenige gevaar is de hypothetische mogelijkheid, dat men vroeg of laat op een rijstader stuit van een kwaliteit, die niemand meer apprecieert. In dat geval zou men de exploitatie van den berg nòg niet behoeven te staken, aangezien er altijd nog idealisten zijn die zich over zoo'n karweitje willen ontfermen. Het accent verschuift van den kennisdrang naar andere motieven: het aesthetische motief, het utiliteits- en het spelmotief. Ook in de wiskunde is een dergelijke verschuiving waar te nemen, doch uit de omstandigheid, dat de belangstelling voor grondslagen-onderzoek in de wiskunde heden ten dage hoogtij viert, en dat daaraan door de allerbeste mathematici wordt gewerkt, dienen we te concludeeren dat het eerste motief, de drang naar onbetwistbare kennis, er nog steeds een zeer belangrijke plaats inneemt.

Laten wij nu de schoonheidselementen van de wiskunde eens in oogenschouw nemen. Na de opmerking gemaakt te hebben, dat deze een kwestie van smaak betreffen en dat over smaak niet valt te twisten, kunnen we probeeren, eenigszins objectief verschillende vrij algemeen erkende schoonheidskenmerken in de wiskunde aan te wijzen. Ik wil niet betoogen dat àlle wiskunde àl deze kenmerken vertoont, want er bestaat zowel mooie als leelijke wiskunde, evenals er mooie en leelijke schilderijen zijn. Niemand kan een objectieve scheidingslijn tusschen de mooie en de leelijke trekken, maar dat neemt niet weg dat schilderkunst aesthetische waarde bezit. Een schoonheidskenmerk is bijvoorbeeld *kracht*. Evenals men een locomotief mooi kan vinden, òmdat zij sterk is en zij zulks in haar vormen duidelijk uit laat komen, kan men in de wiskunde een bewijs, een stelling, een methode of een theorie mooi vinden wegens haar kracht. Ik denk bijvoorbeeld aan de door Leibniz en Newton gegrondveste infinitesimaalrekening, die plotseling ongekende perspectieven opende. Met buitengewoon eenvoudige middelen was een methode geschapen, die het mogelijk maakte om door te dringen in vele gebieden, die voordien ontoegankelijk waren geweest. Zoo stelde de infinitesimaalrekening Newton in staat om uit een een-

voudige gravitatiehypothese de wetten van Keppler betreffende de banen der planeten af te leiden en zich van allerlei afwijkingen rekenschap te geven. Het werd mogelijk problemen in de mechanica en physica door differentiaalvergelijkingen te beschrijven en deze in vele gevallen op te lossen. Men kan gerust zeggen dat zonder deze mathematische methode de techniek en de meeste exacte wetenschappen nu nog in een uiterst primitief stadium zouden staan.

Maar het voorbeeld der infinitesimaalrekening is een slecht gekozen voorbeeld van kracht. Hier is niet alleen de *kracht* groot, maar ook het *practisch nut,* en het is niet gemakkelijk uit te maken welke eigenschap men nu het meest bewondert. Kracht behoeft echter niet altijd direct met practisch nut samen te gaan. Zoo kan men een onstuimige waterval bewonderen om de kracht, die erin tot uitdrukking komt, zonder direct te denken aan het omzetten van deze kracht in kWh's. Ik zou U wel wiskundige voorbeelden van kracht zonder practisch nut kunnen geven, maar laat dit achterwege. Om diegenen te bevredigen, die kracht alleen wegens het nut kunnen appreciceren, zou ik immers een voorbeeld moeten kiezen, waarbij de nutteloosheid duidelijk naar voren springt. Zoo'n voorbeeld zou echter gemakkelijk voedsel kunnen geven aan het misverstand dat vele mathematici opzettelijk zouden streven naar kracht zonder nut, en dus nutteloosheid en ontoepasbaarheid tot schoonheidscriteria zouden hebben verheven.

Een ander schoonheidskenmerk is *eenvoud.* Lang niet alle wiskunde is eenvoudig, doch overal waar eenvoud mogelijk is wordt deze om aesthetische redenen geprefereerd. Waar van een stelling meer bewijzen mogelijk zijn, zal aan het eenvoudigste meestal de voorkeur worden gegeven. Overal waar een simpele redeneering een wild gereken vervangt, zal zulks iedereen bekoren.

Ook resultaten kunnen eenvoudig zijn. Men vindt de stelling van Pythagoras mooi, omdat zij een eenvoudig verband legt tusschen de hypotenusa en de rechthoekszijden van een rechthoekigen driehoek: $c^2 = a^2 + b^2$. Als er voor c een ingewikkelde formule was uitgekomen met wortelvormen en logarithmen er in, zou de schoonheidswaarde aanmerkelijk zijn gedaald.

Natuurlijk hangt de waardeering van den eenvoud van een resultaat nog af van de waarde van het resultaat. De formule voor $(a + b)^2$ is eenvoudig, en ook heel goed bruikbaar. Maar iemand die de bedoeling van de opgave eenmaal heeft begrepen, zal het resultaat $a^2 + 2ab + b^2$ onmiddellijk opschrijven en er zich ternauwernood over verwonderen. Wil een resultaat dus door eenvoud bekoren, dan moet het tegelijk kunnen verrassen, het moet onver-

wacht zijn en niet triviaal. De stelling van Pythagoras is niet triviaal, maar drukt een belangrijke ontdekking uit. De eenvoud ervan draagt bij tot het belang en de toepasbaarheid. Doordat de stelling eenvoudig is, is zij gemakkelijk te onthouden en te hanteeren. Men kan daarom geneigd zijn ook de waarde van den eenvoud geheel aan toepasbaarheid toe te schrijven en niet meer over schoonheid te spreken. Laat ik nu niet in de fout vervallen, over aesthetica te gaan argumenteeren, doch U als voorbeeld een wonderlijk eenvoudige ontdekking van Fermat noemen.

Beschouwen we eens die ondeelbare getallen die viervouden plus een zijn: 5, 13, 17, 29, 37, 41, . . . enz. De bedoelde stelling luidt nu, dat elk dezer getallen als som van twee kwadraten kan worden geschreven: $5 = 1^2 + 2^2$, $13 = 2^2 + 3^2$, $17 = 1^2 + 4^2$, $29 = 2^2 + 5^2$ enz. Ze kunnen bovendien slechts op één manier als som van twee kwadraten worden geschreven. Deze stelling is verrassend, want zij legt verband tusschen twee zeer ongelijksoortige eigenschappen: ondeelbaarheid en splitsbaarheid in kwadraten. Zij is niet triviaal. Integendeel, wie deze stelling bewijzen kan, geeft blijk van een behoorlijke wiskundige begaafdheid. Het geven van een bewijs moge niet gemakkelijk zijn, het resultaat is in elk geval zeer eenvoudig en zal ook bewonderaars vinden onder degenen die nimmer wiskunde in eenigen vorm tot zich hebben genomen. Gemakkelijke toepasbaarheid is hier geen motief voor de waardeering van den eenvoud, want iemand die de stelling van Fermat voor het eerst hoort, weet niet waaròp en waaròm hij haar toe zou moeten passen. Dit leidt mij er toe, den eenvoud van deze stelling een aesthetische waarde te noemen.

Men spreekt in de wiskunde ook van *élégance*. Dit begrip is moeilijk in woorden uit te drukken, maar iedereen kan de bedoeling aanvoelen. Het is bijvoorbeeld elegant om formules die symmetrisch zijn in een aantal variabelen, zóó te bewijzen, dat bij elken stap van het bewijs die symmetrie behouden blijft. In het algemeen is dan de behandeling „soepeler" dan wanneer de symmetrie verloren gaat. In de analytische meetkunde is het rekenen met homogene coördinaten meestal eleganter dan met inhomogene, ofschoon een beginneling de laatste gemakkelijker vindt. Verder is het leelijk, als in een bewijs tweemaal ongeveer dezelfde beschouwing optreedt, en het is elegant om met behulp van den een of anderen kunstgreep deze twee „onder één hoedje te vangen". Het is niet elegant om op musschen te schieten met een kanon, of visch te vangen met handgranaten. Zoo wordt het ook niet elegant geacht om met partieel

differentieeren los te trekken op een sommetje dat met doodgewone algebra gemakkelijk kan worden opgelost.

Een vierde schoonheidskenmerk dat ik U wil noemen, is *harmonie*. Er is sprake van harmonie, wanneer in een wiskundig bewijs, of in een theorie, een aantal argumenten of methoden van verschillenden aard elkaar aanvullen en door de goede samenwerking tot een resultaat komen. Sommige deelen der wiskunde wekken de gedachte aan een groot orkest. Ik denk bijvoorbeeld aan de theorie der elliptische functies waar onder andere de integraalrekening, oneindige reeksen en producten, de functietheorie van Cauchy, van Riemann en van Weierstrass ieder op hun beurt en soms gezamenlijk een steentje bijdragen. Wat dit betreft was Felix Klein een begaafd componist en dirigent. In zijn werken laat hij zoo goed als alle onderdeelen van de toen bekende wiskunde samenvloeien tot één machtige symphonie. Deze onderdeelen behouden daarbij elk hun zelfstandige waarde, maar grijpen overal in elkaar, vullen elkaar aan, steunen elkaar, en bereiken gezamenlijk nieuwe, mooie en grootsche resultaten. De aesthetische waarde van het werk van Klein ligt grootendeels in het *symphonische* karakter ervan. Een typisch voorbeeld is zijn boek over de hypergeometrische functies, waarin hij de theorie vanuit drie gezichtspunten: de hypergeometrische reeksen, de hypergeometrische integralen en de hypergeometrische differentiaalvergelijking ontwikkelt, overal hun onderlinge samenhang aantoont en deze bekroont door de van Riemann afkomstige functietheoretische behandeling. Daarna bestudeert hij de door het quotient van twee hypergeometrische functies opgeleverde conforme afbeelding, onder allerlei algebraische, meetkundige en functietheoretische gezichtspunten.

In verband met de schoonheidselementen in de wiskunde zou men nog de volgende vraag naar voren kunnen brengen: Is die schoonheid een eigenschap van de manier waarop de mathesis wordt beschreven of is het de schoonheid van de wiskunde zèlf? Bij het stellen van deze vraag ziet men de wiskunde als een schilderij waarop een natuurtafereel is afgebeeld en vraagt men of de schoonheid berust op de verf dan wel op de natuur. Dit brengt ons op de vraag: bestaat er wel, zooals de natuur bij het schilderij, een wiskundige realiteit, die door de wiskundigen steeds verder wordt ontdekt en in kaart wordt gebracht? Bestaat de wiskunde op zichzelf, buiten den menschelijken geest om?

Deze vragen staan op een primitief niveau en worden door den modernen mensch naar den rommelhoek der schijnproblemen verwezen. Wat zouden we onder wiskunde anders kunnen verstaan

dan de som van alle menschelijke mathematische activiteit? Niettemin kunnen dergelijke primitieve onderscheidingen heel goed van invloed zijn bij aesthetische waardeeringen. Bij sommige wiskundige theorieen kan men van oordeel zijn, dat Gauss of Riemann of wie het geweest moge zijn, iets mooi in elkaar heeft gezet en elegant heeft behandeld, scherp geformuleerd en economisch bewezen, doch in andere gevallen kan men meer neigen tot de opvatting, dat het de wiskunde zèlf is, waaraan de aesthetische waarde toekomt, onafhankelijk van wat menschen er aan hebben gedaan. Dezen indruk krijgt men vooral daar waar met een vrij eenvoudig principe plotseling een groot en mooi gebied wordt geopend, en ook daar, waar men van een stelling of formule steeds meer frappante analogieën vindt, zonder dat men den algemeenen achtergrond daarvan kan ontdekken. We hebben dan het gevoel, dat de wiskunde veel mooier is dan het gedeelte, dat wij er tot nu toe van ontdekt hebben. Of de wiskunde buiten ons om nog wel bestaat, vragen we ons daarbij niet af. We *gelooven* eenvoudig dat ze bestaat.

Een ander schoonheidselement, dat in de wiskunde een belangrijke plaats bekleedt, is *orde*. Het doet aesthetisch aan, in den een of anderen warboel orde te scheppen, bijvoorbeeld door een geschikte classificatie. Doch hier is het gemak dat men heeft door denkarbeid uit te sparen meestal zóó groot, dat het aesthetische motief bijna niet wordt opgemerkt.

In de wiskunde kent men ook nog elementen, die geen schoonheidselementen genoemd mogen worden, maar die niettemin tot het genoegen van den mensch kunnen bijdragen. Ik bedoel hier de genoegens die het wiskundig bezigzijn kan opleveren en die men *spelelementen* zou kunnen noemen. Het zijn genoegens die men bij iedere wetenschapsbeoefening aantreft, zooals: het op avontuur uitgaan in een onbekend gebied en het terugkijken als er iets geheel voltooid is. De belangrijkste genoegens zijn echter: het *zich verwonderen* en het *hebben van een goeden inval.*

Gelukkig is de mensch die zich nog ergens over verwonderen kan: wie dat niet kan, heeft een saai leven. Gelukkig is bovenal de mensch, die zich over *kleine* dingen kan verwonderen, want wie als objecten voor zijn verwondering steeds grootere en grovere dingen noodig heeft, vervalt gemakkelijk in sensatiezucht.

Niet minder geluk dan de momenten van verwondering verschaffen de goede invallen. Het menschelijke denkvermogen is een log en traag apparaat. Doorgaans beweegt het zich machinaal en fantasieloos, desnoods wel ordelijk en ijverig, maar toch over plat-

getreden paden, zoodat het niets nieuws bereikt. Maar soms maakt het plotseling een grooten sprong en komt dan tot iets goeds. Het is alsof men zich in een van buiten afgegrendelde kamer bevindt en na lang zoeken bij wijze van toeval op de traditioneele veer drukt die de geheime deur in beweging brengt. Deze momenten, waarop we *Eureka* roepen, behooren tot de beste van ons leven.

We zullen nu eenige beschouwingen wijden aan de *vormende waarde* der wiskunde, waaronder we verstaan den invloed dien het complex van mathematische spelregels, denk- en werkmethoden en -gewoonten heeft gehad en nog heeft op onze beschaving als geheel en op de persoonlijkheid van den individueelen beoefenaar in het bijzonder.

Wat de spelregels betreft, deze zijn de regels die bepalen wat mag en niet mag. Zij spreken zich uit over de eischen, waaraan axioma's, definities, redeneeringen en stellingen moeten voldoen wat hun logischen inhoud betreft. Het werken met de spelregels beteekent een oefening in het logisch redeneeren. De opvoedende waarde ervan wordt verhoogd door de omstandigheid, dat foutieve redeneeringen in de wiskunde veelal gemakkelijk door tegenvoorbeelden zijn te ontzenuwen. Doordat men zich er vaak genoodzaakt ziet, incorrecte redeneeringen, van zichzelf of van een ander, te restaureeren of de onherstelbaarheid er van aan te toonen, kan de beoefening der wiskunde een sterk critisch vermogen aankweeken, wat zoowel voor alle andere wetenschappen als ook voor het dagelijksch leven nuttig is.

Afgezien hiervan ligt de *cultureele* waarde van de spelregels in het feit, dat de axiomatische en logische opbouw der wiskunde een model vormt voor alle deductieve wetenschap. Niet ten onrechte doceert men tot den huidigen dag in het middelbare meetkundeonderwijs de Elementen van Euclides, die, zij het dan ook met eenige tekortkomingen, dezen opbouw duidelijk demonstreeren. Hier ziet men een samengaan van redeneering en aanschouwing, hetgeen een didactisch waardevol element is, doch het hoofdmotief is, dat de redeneering van de aanschouwing wordt losgemaakt. Als zoodanig vormen de Elementen een cultuurmonument van hooge waarde.

Het is niet alleen de kennis der logische spelregels zèlf, die door de wiskundige activiteit wordt bevorderd. Iemand die precies weet hoe hij den eenen steen op den anderen moet metselen, is nog niet altijd in staat een huis te bouwen. Hij dient nog te weten welke kenmerken een huis van een vormeloozen steenklomp onderscheiden,



Nov. 1946

Prof. Dr C. VISSER,

geb. 8 April 1910 te Sliedrecht, leraar aan de Gemeentelijke Hogere Burgerschool te Dordrecht 1936—1946, hoogleraar aan de Technische Hogeschool te Delft in 1946.



Nov. 1946

Prof. Dr N. G. DE BRUYN,

geb. 9 Juli 1918 te 's-Gravenhage; 1939—1944 assistent aan de Technische Hogeschool, 1944—1946 werkzaam bij „Philips"; hoogleraar aan de Technische Hogeschool te Delft in 1946.

en bovendien, hoe hij tot het resultaat „huis" moet komen. Evenzoo dient men bij het werken aan een mathematisch probleem over zekere bewuste of onbewuste tactische methoden te beschikken om tot een oplossing te komen. Het is echter uiterst moeilijk aan te geven op welke methoden en welke kwaliteiten de wiskundige vaardigheid is gebaseerd en hoe deze methoden en kwaliteiten het beste kunnen worden aangeleerd. Het traditioneele middel om ze te leeren beheerschen is de beoefening van de wiskunde zelf; het is de taak van iederen docent, na te gaan welke stof en welke behandelingswijze zich daarvoor het beste leenen. Men zou dit ook kunnen omkeeren, nl. door aan leerlingen, die reeds eenig begrip van wiskunde hebben, afzonderlijk onderricht in tactische methoden te geven, waarbij dan wiskundige problemen alleen als voorbeelden optreden. Ik denk in dit verband aan het onlangs verschenen boekje: „How to solve it", van den bekenden mathematicus G. Pólya, waarin deze algemeene richtlijnen voor het oplossen van problemen aangeeft. Hoe moeilijk deze materie echter systematisch is te behandelen. blijkt wel uit het feit dat de schrijver een aantal methoden en beschouwingen elk van een trefwoord voorziet, en ze vervolgens alphabetisch rangschikt! Het is mij overigens niet bekend of een dergelijk onderwijs in tactiek ooit tot gunstige resultaten heeft geleid.

Al moeten we hier dan in het midden laten, welke de tactische methoden en voor de beoefening der mathesis nuttige gewoonten *precies* zijn, het is niet aan twijfel onderhevig, dat vele dezer methoden en gewoonten door oefening kunnen worden aangeleerd, en dat ze ook buiten de wiskunde van nut kunnen zijn. Ik denk bijvoorbeeld aan orde, netheid, systematiek, weglaten van niet ter zake doende bijkomstigheden, duidelijke en scherpe formuleeringen en begripsvormingen, doelmatige notaties, het vervangen van voorwaarden door equivalente, aan de gewoonte om bij iedere stelling te onderzoeken of zij kan worden omgekeerd, en zoo neen, waarom niet, aan het oplossen van problemen door van achteren naar voren te werken, enz.

Belangrijk is verder het oefenen van het logisch voorstellingsvermogen, d.i. het vermogen om een aantal zaken tegelijk in hun onderlingen samenhang te overzien, ook in gecompliceerde gevallen. We zouden hier ook kunnen spreken van het leeren combineeren.

Verschillende dezer nuttige eigenschappen en gewoonten kunnen ook in andere gebieden worden aangeleerd, doch geen tak van wetenschap, sport of spel, biedt ze in zulk een rijke verscheidenheid als de wiskunde.

Wanneer ik tenslotte aan de *toepasbaarheid* der wiskunde slechts weinig woorden wijd, is dat niet omdat ik dit een cultuurfactor van lageren rang acht, doch omdat welhaast iedereen van deze toepasbaarheid volkomen overtuigd is. De practische waarde van de mathesis is voor de meeste wetenschappen en de meeste deelen der techniek immers zoo groot, dat men wel een half dozijn zwarte brillen zou moeten opzetten om haar niet te zien. Waar men ook kijkt, overal ziet men wiskunde toepassen. In sommige vakken kan men met zeer eenvoudige wiskunde volstaan, in andere gevallen, zooals in de physica en in verschillende deelen der moderne techniek, heeft men de krachtigste mathematische hulpmiddelen noodig en schreeuwt men voortdurend om méér. Nu eens ziet men volgens traditioneele schema's berekeningen uitvoeren, dan weer heeft de wiskunde de taak om bereikte resultaten te consolideeren, zoodat de voortzetting van het onderzoek wordt gesteund door het bewustzijn dat er niet op zand is gebouwd, en soms zijn de wiskundige methoden aanleiding tot het openen van een geheel nieuw gebied dat niet langs andere wegen te bereiken is.

Men moet zich echter geen àl te groote voorstelling maken van de macht der wiskunde. Wanneer bijv. een technicus zich tot een mathematicus wendt met de vraag, hoe men in het algemeen de maxima bepaalt van een functie waarvan de Fourier-coëfficienten gegeven zijn, zal hij meestal weinig bevredigd worden. Desondanks kan het feit dat een beroepswiskundige er eigenlijk ook niets beters op weet te verzinnen dan het teekenen van een plaatje in elk afzonderlijk geval, voor den technicus een zekeren troost beteekenen en hem den moed verschaffen om een bewerkelijk onderzoek tot het bittere doch vruchtbare einde uit te voeren.

Terugkeerende tot het door Huizinga gesignaleerde cultuurverval, meen ik op grond van de waarden: *kennisdrang, schoonheid, intellectueele vorming* en *practisch nut* te mogen zeggen, dat de wiskunde bij dit vervalproces een *behoudenden factor vormt.* Dat de beteekenis van deze uitspraak niet mag worden overdreven, blijkt wel uit het feit dat de wiskunde bijv. met het terrein van de moreele normen geen duidelijke relaties heeft, afgezien van enkele vage indicaties betreffende deugden als oprechtheid en bezonnenheid. Niettemin blijven er nog genoeg redenen over, om de wiskunde de *ruggegraat* van onze cultuur te mogen noemen.

Volgens een bekende anecdote gaf eens een schooljongen op de vraag wat de ruggegraat was, het volgende antwoord: op den eenen kant zit het hoofd, op den anderen kant zitten we zelf. Analoog

kunnen we de geestelijke en de practische waarde van de wiskunde symboliseeren.

Vragen wij ons thans echter af, of de wiskunde niet zelf aan verval onderhevig is, of er niet het gevaar dreigt, dat vroeg of laat ruggegraatsverkromming optreedt, het hoofd eraf valt en het niet meer comfortabel zal zijn om op den anderen kant te zitten.

Ik noemde U reeds een kleine verschuiving van het kennismotief in de richting van het spelmotief, doch dit mogen we geen ernstig verval noemen. Het spel is, evenzeer als het kennisideaal een waardevolle cultuurfactor. Het spel wordt pas dàn gevaarlijk en decadent, wanneer men door een gril van de spelregels afwijkt. Zoo verliest bijv. het schaakspel alle waarde, wanneer men zich met minderwaardige practijken als „paard in den zak" gaat inlaten, om te eindigen in het gebruiken van de schaakstukken als tolletjes en projectielen. De heilige ernst, waarmee men zich in de wiskunde aan spelregels houdt, garandeert echter dat van dézen kant geen gevaar is te verwachten.

Ernstiger gevaren, die de wiskunde bedreigen, zijn onder andere de volgende: Overdrijving van één der vier eerder genoemde wiskundige waarden ten koste van de andere, isolatie van afzonderlijke deelen der wiskunde, en verzwakking door overlading inplaats van beperking tot het essentieele. De oorzaak van deze gevaren ligt in het feit, dat het menschelijk intellect een soort plafond schijnt te bezitten, terwijl anderzijds de wiskunde tot een gigantisch apparaat is uitgegroeid. Wanneer men bedenkt, dat voor het vervoeren van de verzamelde werken van Euler, Lagrange, Gauss, Cauchy, Cayley, om eens vijf groote producenten te noemen, vijf kruiwagens noodig zijn, dat slechts een klein gedeelte daarvan kennelijk bestemd is om weer te worden vergeten, en dat jaarlijks vele duizenden artikelen in mathematische vaktijdschriften verschijnen, wordt het duidelijk dat bij den huidigen stand van de techniek van het menschelijk intellect en van de hulpmiddelen om dit intellect terzijde te staan, het voor den enkeling onmogelijk is om ook maar van een klein onderdeel alles te beheerschen. Daar komt bij, dat geen mathematicus zich kan onttrekken aan het verlangen om scheppend werk te leveren, en dat hij dit verlangen veelal wil bevredigen door het zoeken en vinden van nieuwe dingen in de buitenste lagen der wiskunde, aan het front. Aan deze lofwaardige neiging, die behalve op zin voor avontuur overigens ook op eerzucht kan berusten, heeft een groot gedeelte der wiskunde zijn ontstaan te danken, maar aan den anderen kant ook de te ver doorgevoerde specialisatie en isolatie. Misschien worden deze bezwaren

verzacht, wanneer een zoodanige wijziging van de organisatie der wiskundige wereld wordt gevonden, die het motief van bewuste of onbewuste eerzucht opheft.

Ofschoon de gevaren, die ik U noemde, zeer reëel zijn en hier en daar in feiten zijn omgezet, mogen we niet aannemen, dat ze fataal kunnen worden. De wiskunde is een levend organisme, dat in zichzelf over de middelen beschikt om ziekten te bestrijden en wonden te heelen. Eenerzijds verzetten het kennisideaal en het schoonheidsideaal zich krachtig tegen isolatie en versnippering, aan den anderen kant zorgt de door de wetenschappen en de techniek uitgeoefende drang ervoor, dat het contact met de realiteit behouden blijft, en dat vele nuttelooze spitsvondigheden vaak sneller worden vergeten dan ze zijn ontstaan.

Zoolang er nog menschen gevonden worden, die door de wiskundige methoden en resultaten worden geboeid, in wèlk stadium van ontwikkeling het ook zijn moge, zal de wiskunde blijven *leven,* en voortgaan haar nuttige taak in onze cultuur te vervullen. De smaak kan zich wijzigen, en zulks kan een verandering van het uiterlijke aanzien van de wiskunde met zich meebrengen, doch dit kan het wezen niet aantasten van dit spel van den vrijen geest, gebonden aan in vrijheid gekozen grondslagen, het spel van het systematische denken, het scheppende denken en de aanschouwing, het spel dat opvoedt en vermaakt, boeit en bekoort en dat bovendien, of desondanks, ook nog nuttig is.

VAN DE PERSONEN.

Prof. Dr J. C. H. GERRETSEN.

Prof. Gerretsen werd op 20 Mei 1907 te Winschoten geboren. Hij bezocht de Gem. H. B. S. met 5-j. cursus aldaar en deed in 1925 het eindexamen. Enige maanden later slaagde hij voor het examen ter verkrijging van de middelbare akte wiskunde K I. In hetzelfde jaar werd hij ingeschreven als student in de faculteit der wis- en natuurkunde aan de Rijks-Universiteit te Groningen; zijn academische examens werden door hem cum laude afgelegd.

In 1939 promoveerde hij cum laude tot doctor in de wis- en natuurkunde op een proefschrift „De topologische grondslagen der meetkunde van het aantal".

Van 1930—1932 was hij leraar aan de Rijks H. B. S. te Meppel, van 1932—1934 leraar aan de M. T. S. te Leeuwarden en van 1934—1946 leraar aan de Rijks H. B. S. te Groningen. In 1941 werd hij aangesteld als Docent in de Didactiek der wiskunde aan de Rijks-Universiteit te Groningen, maar in 1943 door de Duitse bezettingsautoriteiten van die functie ontheven op grond van het feit, dat hij als politiek gevangene in het concentratiekamp Vught en in de gevangenis te Utrecht heeft moeten verblijven. In 1945 werd hij in die functie hersteld en werd hem tevens een leeropdracht gegeven voor de hogere meetkunde ter tijdelijke voorziening in de vacature ontstaan door het overlijden van Prof. Dr G. Schaake.

Als student werd hij in 1928 bekroond met de beantwoording van een prijsvraag uitgeschreven door het Wiskundig Genootschap te Amsterdam; in 1940 viel hem ten tweeden male die eer te beurt.

Behalve zijn proefschrift verscheen van zijn hand een wetenschappelijk werk over de niet-Euklidische meetkunde. Hij publiceerde voorts artikelen over afbeeldingsmeetkunde, vierdimensionale lijnenmeetkunde, over de grondslagen der hyperbolische meetkunde en trigonometrie, meerdimensionale meetkunde, functionaalvergelijkingen, topologie en daarnaast artikelen op het gebied van de Didactiek der wiskunde. Tevens schreef hij een schoolboek over Beschrijvende Meetkunde.

Op 24 October 1946 aanvaardde hij als opvolger van Prof. Schaake het ambt van Hoogleraar aan de Rijksuniversiteit te Groningen met een rede getiteld: Mathesis en Aesthetica.

Prof. Dr N. G. DE BRUYN.

Prof. De Bruyn werd op 9 Juli 1918 geboren te 's-Gravenhage; bezocht de H. B. S. Stadhouderslaan aldaar en deed in 1934 het eindexamen als extraneus; slaagde in 1935 voor K I, in 1936 voor K V. Hij studeerde daarna in Leiden, waar hij in 1941 het doctoraal examen aflegde; promoveerde cum laude in 1943 aan de Vrije Universiteit te Amsterdam op proefschrift: „Over modulaire vormen van meer veranderlijken".

Van Sept. 1939 tot Juni 1944 assistent in Delft, daarna 2 jaar wetenschappelijk medewerker aan het natuurkundig laboratorium van „Philips".

Op 24 Sept. 1946 werd Prof. De Bruyn benoemd tot hoogleraar in de zuivere en toegepaste wiskunde en mechanica aan de Technische Hogeschool; zijn inaugurele rede „Enige beschouwingen over de waarde der wiskunde" werd gehouden op 26 Nov. 1946.

Prof. Dr HANS FREUDENTHAL.

Dr Freudenthal is op 4 Oct. 1946 benoemd tot hoogleraar in de zuivere en toegepaste wiskunde en de grondslagen der wiskunde aan de Rijksuniversiteit te Utrecht.

Dr Freudenthal werd op 17 Sept. 1905 geboren te Luckenwalde; hij studeerde van 1923—1930 wis- en natuurkunde aan de Universiteit te Berlijn en aan de Sorbonne te Parijs.

1930. Dr phil. met proefschrift: Üeber die Enden topologischer Räume und Gruppen (verschenen in Math. Zeitschrift 33).

1930. Assistent bij Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik.

1933—1937. Eerste assistent bij het onderwijs in de wiskunde aan de Universiteit van Amsterdam.

Sinds 1937 conversator aan het Mathematisch Instituut der Universiteit van Amsterdam; door den bezetter ontslagen.

Sinds 8 Nov. 1946 werkzaam als hoogleraar aan de Rijksuniversiteit te Utrecht.

9 Dec. 1946. Intreerede: 5000 jaren internationale wetenschap (verschenen bij Noordhoff, Groningen).

IN MEMORIAM
WILLEM REINDERSMA †
26 October 1877—22 Juni 1946



Het verzoek van de Redactie van Euclides een memoriam te willen schrijven over mijn trouwen vriend en medewerker heb ik dankbaar aanvaard. Want waar is dit voor een groot didacticus en paedagoog als Reindersma was; beter op zijn plaats dan in het tijdschrift, dat gewijd is aan de didactiek der exacte vakken.

Alvorens dieper op de didactische en paedagogische qualiteiten van den overledene in te gaan, geef ik hier eerst in het kort een levensbeschrijving.

Geboren 26 October 1877 te Tolbert (Groningen), waar zijn ouders een boerderij hadden, ging Willem Reindersma, na de lagere school te hebben doorlopen, naar de Rijkskweekschool voor Onderwijzers in Groningen. We zien hem dan 1 Juni 1896 zijn loopbaan bij het onderwijs beginnen als onderwijzer in Paterswolde. Ondertussen studeerde hij voor de Hoofdacte en voor het Staatsexamen. In Groningen studeerde hij Wis- en Natuurkunde, waar Prof. Haga in zijn nieuwe laboratorium in hem de liefde tot het experiment deed ontwaken. Na zijn Candidaatsexamen volgde hij Casi-

mir naar Den Haag, eerst als leraar aan de Vervolgschool van de Haagse Schoolvereniging, ondertussen medewerkende aan het tot stand komen van het Nederlands Lyceum, dat in September 1909 werd geopend en waaraan Reindersma was verbonden als Directeur van de H. B. S. afdeling en leraar in Wis- en Natuurkunde.

Tussen deze bezigheden door kon hij in Leiden bij Lorentz nog college lopen en in Groningen zijn doctoraal examen afleggen. Met een onderbreking van 1915 tot 1923, in welke tussentijd hij Directeur was van de Kweekschool voor Onderwijzers in Rotterdam, in welke functie hij o.m. de Wis- en Natuurkundige opleiding voor de Onderwijzers moderniseerde, is hij tot 31 Mei 1946 aan het Nederlands Lyceum verbonden geweest en wel van 1931 af als Rector.

Op die laatste Meidag zou hij aftreden als Rector na 50 jaar lang het onderwijs in allerlei vormen trouw te hebben gediend. Er waren dan ook grote plannen om die afscheidsdag tot een voor hem onvergetelijke dag te maken, maar het heeft niet zo mogen zijn. Reeds vele maanden was hij niet meer de oude. Wel kwam hij nog dagelijks op het Lyceum om met zijn opvolger allerlei te bespreken. 22 Mei is hij er het laatst geweest. Toen de doctoren, die hem behandelden, ten slotte moesten verklaren, dat er geen genezing mogelijk was, verkeerde alle vreugde voor de afscheidsdag in diepe smart. Met Pinksteren en volgende dagen liet hij zijn vrienden een voor een komen om afscheid te nemen. 22 Juni kwam aan dit rijke leven een einde.

Laat mij nu trachten in enkele hoofdtrekken te schetsen wat Reindersma als didacticus en paedagoog heeft betekend. Doordat ik het grote voorrecht heb gehad, zovele jaren met hem samen te werken, heb ik zijn grondgedachten over de didactiek der Natuurkunde en de paedagogische beginselen, waarop die berusten, zò in mij op kunnen nemen, dat wij die ten grondslag hebben gelegd aan ons Nieuw Leerboek der Natuurkunde en aan de andere, die daarvan het gevolg zijn geweest.

Waarin bestond nu dat „Nieuwe"?

De te behandelen stof en de methode van behandeling dienen te worden aangepast aan de geestelijke ontwikkeling van de leerling. Dat brengt dus met zich mede, dat het experiment op de voorgrond staat en de deductie meer naar later wordt verschoven. Gebruikmakende van de zin voor zelfwerkzaamheid bij de jeugd zijn van de aanvang af practische oefeningen opgenomen. Verderop komen experiment en deductie meer met elkaar in evenwicht. Sommige problemen, die zich daartoe lenen, zijn historisch behandeld, maar meestal wordt een meer directe weg gevolgd ter oplossing van een probleem. Daarin ligt vanzelf opgesloten, dat de leerlingen er toe gebracht worden zelf over de problemen na te denken en zo tot begrip te komen.

Deze zelfde gedachten had Reindersma in zijn Rotterdamse periode ook al toegepast bij het schrijven van zijn Beknopt Leerboek der Vlakke Meetkunde, waarbij hij, zoals hij zelf zegt, getracht heeft de fout te vermijden: te beginnen met grote gestrengheid in plaats van daarmee te eindigen. „Het axiomatisch aanvaarden ener waarheid is toch altijd beter dan een schijnbewijs te leveren."

Weer aansluitende aan de zucht tot zelfwerkzaamheid van de jonge mens, behandelt hij in het eerste deel de meetkunde als *Meet*-kunde en pas verderop komen de strengere bewijzen. Typérend is bijv. de uitdrukking, die hij daarvoor gebruikt: „Het boek groeit met de leerling."

Maar laat ons nu weer terugkeren tot de Natuurkunde. Het is te begrijpen, dat toen het Bestuur van de Nederlandse Natuurkundige Vereniging een commissie instelde om rapport uit te brengen over het onderwijs in de Natuurkunde aan Gymnasia, H. B. S. en Lycea (bekend als de commissie Fokker), Reindersma daarin een groot werkzaam aandeel heeft gehad. Hoe komen mij die commissievergaderingen in de Rectorskamer van het Nederlands Lyceum weer voor de geest, waarin Reindersma op zijn rustig kalme manier de belangrijke problemen als: „Doelstelling van het Natuurkunde onderwijs", het „Practisch Werken" en zo meer formuleerde en verdedigde. De nieuwe gedachten werden door hem ook uitgesproken toen op het Nederlands Natuur- en Geneeskundig Congres in 1927 in Amsterdam het Natuurkundeonderwijs ter sprake kwam. Hij wijst er op dat de Natuurkunde, die wij moeten onderwijzen, in de eerste plaats *experimentele* wetenschap is en als zodanig, niet als wiskunde, moet worden behandeld. „De wijze waarop de leerling tot kennis komt, moet de wezenlijke kenmerken der natuurwetenschappelijke methode bevatten". „Het Natuurkunde onderwijs kan opvoeden tot logisch denken, tot scholing der opmerkingsgave, tot oefening in objectieve beschouwing der gegevens. Maar dan moet de leerling zelf denken, zelf waarnemen".

Verder wijst hij er op, dat de algemene paedagogische eis, die grotere zelfwerkzaamheid van de leerlingen vraagt, in de richting van *Practisch Werken* dringt.

Om dit practicumvraagstuk nader te bezien en een lijst van proeven met nauwkeurige opgave van de daarvan benodigde hulpmiddelen samen te stellen, werd door het Bestuur van de Nederlandse Natuurkundige Vereniging een nieuwe commissie ingesteld onder voorzitterschap van Reindersma. De resultaten van het werk van deze commissie, waaraan ook Denier van der Gon een zeer groot aandeel heeft gehad, kan men vinden in: Natuurkundige proeven voor Leerlingen. Deel I (1934) en Deel II (1937). Tegenwoordig is het Practisch werken voor Natuurkunde op vele scholen ingevoerd.

Laat mij, om niet te uitvoerig te worden, nu nog enkele andere kanten van Reindersma belichten:

Dat hij met hart en ziel leraar was en zijn leerlingen steeds kon betrekken in de problemen, waar zij samen mee bezig waren, behoef ik niet nader uiteen te zetten. En dan als Rector van het Nederlands Lyceum, dat hem zo na aan 't hart lag en dat hij geleid heeft als een betrouwbaar stuurman vooral ook in de laatste zware jaren van de oorlog. Wat hij daarbij inwendig veel verwerkt moet hebben bij alle beslissingen, die in het belang van de school, van de leerlingen en leraren genomen moesten worden, zullen weinigen beseft hebben, want hij was stil en weinig mededeelzaam. Hij wist zoveel, maar sprak zo weinig. Toch leefde hij zo met zijn grote liefdevolle hart met ieder mede, die in levensmoeilijkheden zat. Zelf heb ik dit ervaren en weet wat in die tijden echte vriendschap betekent.

Moge deze korte schets iets hebben kunnen vertolken van mijn diepe dankbaarheid voor die vriendschap en moge daarbij tevens enigszins naar voren zijn gekomen hoe deze didacticus en paedagoog in de diepere zin van het woord, een trouwe leidsman is geweest voor vele jonge mensen, die aan zijn zorgen waren toevertrouwd en een stil voorbeeld van trouw voor allen, die in hun leven nader met hem in aanraking zijn gekomen.

Hij ruste in Vrede!

T. VAN LOHUIZEN.

G. L. JAMBROES

Toen de oorlog uitbrak was de heer Jambroes als officier onder de wapenen. Na de capitulatie kwam hij terug aan ons Lyceum, maar het was hem aan te zien, dat hij in een gespannen toestand verkeerde.

Op een dag was hij plotseling verdwenen, niemand wist waarheen. Later bleek, dat hij via Frankrijk, Spanje en Portugal in Engeland was aangekomen. Hij nam dienst bij de Secret Service en werd in ons land „gedropped". Een maand lang was hij hier werkzaam, maar viel spoedig in handen van de contraspionnage. De dag na Dolle Dinsdag [1]) werd hij in Duitsland gefusilleerd.

Hij was een gevoelig mens, die de vrijheid zeer lief had.

Zaandam. Dr J. OOSTERHUIS

---

1) 5 September 1944.

Dr H. HOEK.

Sinds Sept. 1935 als leraar Natuur- en Scheikunde verbonden aan het Gemeentelijk Gymnasium (thans Lyceum) te Doetinchem. Een jong en veelbelovend leraar.

Naast zijn schoolwerk vond hij nog tijd voor het schrijven van een dissertatie, die de kroon zette op zijn studie. Zij mochten hem graag zijn leerlingen, want zij wisten, wat zij aan hem hadden; hij was voor hen een voorbeeld van ijver en studiezin, een oudere makker bij het spel. Onder de collega's was hij gezien om zijn fris en helder oordeel en zijn kameraadschappelijkheid. Een veelbelovend leven.

Totdat in Sept. 1939 het oorlogsgevaar uit Duitsland kwam opzetten, wat voor hem als Jood een directe bedreiging inhield.

November 1940 moest hij zijn leraarsbetrekking neerleggen. Energiek pakte hij aan, wat hij kon vinden, en in Haarlem vond hij een nuttige werkkring. Als men hem in die tijd sprak, was hij nog vol goede moed. Zo hebben wij hem het laatst gezien: energiek, opgewekt, ernstig, maar niet mismoedig. Maar het werd steeds moeilijker om aan de grijpende hand van den wreden bezetter te ontkomen. Hij moest onderduiken en, toen hij van standplaats moest veranderen, is hij onderweg opgepakt en via Westerbork naar Duitsland overgebracht om nooit weer terug te keren.

Zo is hij op een leeftijd, waarop men nog veel van zijn studie en onderwijstalenten mocht verwachten, uit onze gemeenschap weggerukt, als een lid van de Joodse gemeente, tot welk hij behoorde naar zijn geslacht en levensovertuiging.

P. C. v. d. HORST.

Ir. W. MANTEL.

Ir. W. Mantel was een zoon van den bekenden repetitor Mantel te Delft. De liefde voor de exacte wetenschappen had hij dus van niemand vreemd. Na in Delft het diploma voor civiel ingenieur behaald te hebben, was hij korte tijd werkzaam bij de Ned. Spoorwegen te Utrecht. Hierna besloot hij zich aan het onderwijs te wijden.

Aan de R.H.B.S. te Assen onder Van der Linde was hij een toegewijd leraar. In September 1934 kwam hij als directeur aan de R.H.B.S. te Coevorden. In deze functie kon hij gaven volledig ontplooien. Onder zijn leiding kwam in 1937 een A-afdeling tot stand, terwijl hij aan de stichting van het Lyceum zijn beste krachten gaf, overtuigd als hij was met dit type school een streekbelang te dienen.

Het resultaat van zijn werk mocht hij niet meer beleven. Toen ons land bezet werd, gaf hij zich aan het ondergrondse werk. Mogelijk zijn de spanningen te groot voor hem geweest.

In Januari 1945 werd hij door den bezetter weggevoerd en in Maart, na de aanslag op Rauter, gefusilleerd. Reeds eerder had hij, ernstig overspannen, de leiding van de school uit handen moeten geven.

De bezetter heeft hem geen verschrikkingen gespaard en niemand kan weten wat hij heeft moeten doormaken, voordat hij voor altijd rust vond.

Dr W. KOSTER.

Dr W. Koster werd geboren op 6 Juni 1891. Hij bezocht de 3e H.B.S. met 5-j.c. te Amsterdam, deed het staatsexamen β en studeerde vervolgens wis- en natuurkunde. Na zijn doctoraalexamen in 1913 was hij een jaar lang leraar aan het Portugees Israëlitisch Seminarium. Vervolgens ging hij naar Leeuwarden, naar de R.H.B.S., waar hij tot 1918 bleef. Toen keerde hij naar Amsterdam terug en kwam aan „de Tweede Vijf", welke school hij ruim 20 jaren met volle liefde en toewijding diende, niet alleen in de lessen, maar ook buiten de schooluren. Steeds was hij tot hulp bereid; hij organiseerde uitstapjes en „avondjes", kortom hij gaf zich voor zijn leerlingen alle moeite. — November 1940 bracht het einde van zijn werkzaamheden. Wel trachtte hij nog ten behoeve van de talrijke Joodse leerlingen een eigen lyceum te stichten, waar het onderwijs voortgang kon hebben, maar van verwezenlijking van deze plannen kon niets komen. Als zovele lotgenoten moest hij zich al spoedig verbergen, onderduiken, verhuizen en werd zijn enige zorg, zich zelf en de zijnen aan de greep onzer overweldigers te onttrekken. Lange tijd is hem dit gelukt, maar ten slotte werd ook hij gegrepen (vermoedelijk door verraad) en weggevoerd. Niemand heeft hem weergezien. Wij herdenken hem als een goed collega.

H. H. BUZEMAN.

Dr E. L. ELTE.

Wat hij voor zijn vak betekende, kan ik, niet-wiskundige, niet beoordelen. Ik ken hem slechts als mens en als vriend. En ik acht het een voorrecht dezen mens gekend te hebben en met hem als vriend te hebben mogen omgaan. Meer dan 30 jaar heb ik dat voorrecht gesmaakt. Van een herfstavond in het jaar 1910 in Meppel, waar wij beiden onze leraarsloopbaan voorgoed begonnen, tot op den dag, waarop hem met de andere Joodse collega's op onbeschofte wijze de toegang tot de school werd ontzegd, heb ik, behoudens een onderbreking van enkele jaren, bijna dagelijks genoten van de omgang met dezen geestigen intellectueel, muzikaal begaafd, wiens belangstelling zich niet bepaalde tot zijn eigen vak, maar die ook van de klassieken en de moderne talen een meer dan middelmatige kennis bezat. Ook na zijn verdrijving uit de school ontmoette ik hem nog meermalen, uiterlijk bleef hij dezelfde, hoewel hij al sinds jaren het gevaar niet onderschatte, dat hem en zijn geloofsgenoten bedreigde. Totdat ook hij verdween met zijn familie om niet terug te keren. Ik vergeet hem niet. In de droom verschijnt hij me, zo als hij was en alles is van ouds, maar bij het ontwaken beklaag ik mij, dat de droom niet voortduurt. Ik wil er niet aan denken, hoe zijn beulen hem, den tengeren, lichamelijk weerlozen man, mishandeld en vermoord hebben En vergeven kan ik het die vloekwaardigen niet, die hem ... en mij dit hebben aangedaan.

Haarlem. Dr G. A. BRANDS.

E. A. H. F. W. FRIJDA.

Drs E. A. H. F. W. Frijda werd in 1909 te Utrecht geboren, waar hij wis- en Natuurkunde studeerde.

In 1939 werd hij leraar aan het Rijnlands Lyceum. Frijda was een weinig opvallende figuur in het schoolleven. Hij ging rustig zijn eigen gang en wilde zich ook nooit op de voorgrond plaatsen. Hij wijdde zich echter ten volle aan zijn lessen, waaraan hij door de rust en gelijkmatigheid die hem eigen waren een apart cachet gaf. Zijn lessen muntten uit door helderheid en duidelijkheid. Daar hij van nature vriendelijk en hartelijk was, was het altijd een genoegen contact met hem te hebben, terwijl hij voor zijn leerlingen steeds grote belangstelling had.

Einde 1940 moest hij op last van de Duitsers de school verlaten. Thuis bleef hij echter les geven en hoewel hij het persoonlijk met zijn gezin niet gemakkelijk had, wist hij zijn lust en opgewektheid te bewaren.

Had niet door een ongelukkig toeval de duitse politie bij hem thuis zijn ondergedoken zuster gevonden, dan had hij door zijn huwelijk voor deportatie gespaard kunnen blijven.

Hij werd in Februari 1944 als zgn. strafgeval naar Westerbork gestuurd tegelijk met Da Silva. Na enige tijd werd hij op transport gesteld naar het Oosten en is niet meer teruggekeerd.

Wassenaar. I. BIRNIE.

E. FRENKEL.

Naast de vele slachtoffers, die door Duits geweld zijn gevallen, hebben we ook enkelen te betreuren, die door een noodlottige vergissing van de geallieerden om het leven zijn gekomen.

Daartoe behoort onze collega Frenkel, die in Westerbork door een mitrailleurkogel van een passerend geallieerd vliegtuig werd getroffen.

Hij was leraar in de scheikunde aan de 2e O.H.S. te Amsterdam en hij doceerde dit vak op een wijze, die geheel gericht was op de practijk, wat voor deze soort scholen zo verkiezelijk is.

Als geestig collega en uitstekend docent zullen velen hem blijven gedenken.

A. J. BUDDING.

PIETER VENINGA

11 October 1904—25 Januari 1945.

Van 1930—1944 leraar aan de Rijks H.B.S. te Appingedam.



Veninga doorliep de Rijks H.B.S. te Leeuwarden en studeerde aan de Rijks Universiteit te Groningen, waar hij cum laude candidaats- en doctoraal examen in de wis- en natuurkunde deed. Zijn grote begaafdheid bleek ook als wiskundedocent; hij beheerste zijn vak volkomen, maar hij had een afkeer van aan de weg timmeren, en nam niet actief deel aan de dicussies over verschillende stromingen in het onderwijs van zijn vak. Als een echte Fries, oprecht, afwachtend

tegenover onbekenden, was hij trouw aan zijn vrienden — en aan zijn Vaderland. Dit laatste werd hem noodlottig. Gearresteerd in 1944, overleed hij in Sachsenhausen, juist vóór de geboorte van zijn zoon en naamgenoot.

Was zijn heengaan voor zijn familie een zware slag, ook voor de school was het een zeer groot verlies. In de kleine stad waar hij werkte, zal hij geëerd blijven, zolang opofferende strijd tegen het onrecht met bewondering herdacht zal worden.

A. J. STARING.

C. L. TER MEULEN.

Toen in Mei 1940 de duitsers ons landen binnen vielen en West Zeeuws Vlaanderen naderden, koos de heer C. L. ter Meulen met het schip waar hij op woonde zee en stak over naar Engeland, van waar hij later vertrok naar Nederlands-Indië. Het geluk was niet met hem, want na korte tijd werd ook Indië bezet en kwam Ter Meulen terecht in een Japans kamp, waar hij niet meer levend uit gekomen is.

Ter Meulen was opgeleid voor de Kon. Marine, maar ging spoedig naar de koopvaardij. Na zijn huwelijk zegde hij de koopvaardij vaarwel en werd benoemd tot leraar in de natuur- en wiskunde en de cosmografie aan de Rijks hogere burgerschool te Oostburg. Van 1920 tot 1940 bleef hij aan die school verbonden. Vooral zijn natuurkunde lessen werden zeer gewaardeerd, vooral, wanneer het de electriciteit en speciaal de radio betrof. Zijn oud-leerlingen zullen zijn sappige lessen wel nooit vergeten.

In de omgang was Ter Meulen een zeer aangenaam mens, en een prettig collega. Zijn aandenken zal in Oostburg lang bewaard blijven.

Alb. HOVEN.

KORRELS.

LXXIV*a*.

Naschrift op Verscheidenheden VII, de Cirkel van Taylor; jaargang 21, blz. 213.

De heer S. Roodenburg (Amsterdam) was zo vriendelijk mede te delen, dat inderdaad in Catalan, Théorèmes et problèmes de Géométrie, 6ième ed. (1879), pg. 132, de betrokken stelling voorkomt en wel in de volgende vorm.

Soient AP, BQ, CR les hauteurs d'un triangle ABC. On projette chacun des points P, Q, R sur les deux cotés opposès en D et E, F et G, H et K. L'hexagone DGHEFK, inscrit au $\triangle$ ABC jouit des propriétés suivantes:

1. Les diagonales DE, FG, HK, qui joignent les sommets opposés, sont égales;
2. Les côtés opposés sont parallèles;
3. *Les sommets appartiennent à une même circonférence;*
4. En outre cette circonférence est concentrique avec le cercle inscrit au $\triangle$ $\alpha\beta\gamma$, formé par les diagnonales.

Uit 3. blijkt wel overtuigend, dat de cirkel van Taylor met weinig recht deze naam draagt.

O. BOTTEMA.

LXXIV*b*.

In „Euclides" 21ste Jaargang 1945/46 No. 5, 6 wordt een klein artikel gegeven over de cirkel van Taylor.

Mij is niet bekend, hoeveel en welke oplossingen er voor dit meetkundig probleem zijn. Nu lijkt het mij steeds een noodschot te zijn, wanneer een zuiver planimetrisch vraagstuk door een greep naar de goniometrie tot oplossing wordt gebracht. Evenzo, wanneer men, zoals van Taylor zelf wordt beweerd, gedeeltelijk planimetrisch, gedeeltelijk goniometrisch tot oplossing komt. Er ontbreekt dan zo echt de charm, die een „Solution élégante" kan geven. Juist omdat het bewijs voor de cirkel van Taylor door mij zo eenvoudig en aanschouwelijk kan worden gegeven zonder enige goniometrie, meen ik zo vrij te mogen zijn U hiervoor een kleine ruimte in Uw tijdschrift te vragen.

Is in △ ABC de voetpuntendriehoek DEF, en zijn de punten P, Q, R, S, T en U de zes voetpunten, H, K en G de middens der der zijden van △ DEF, dan zijn de hoogtelijnen van △ ABC de bissectrices van △ DEF en de rechten door de hoekpunten H, K

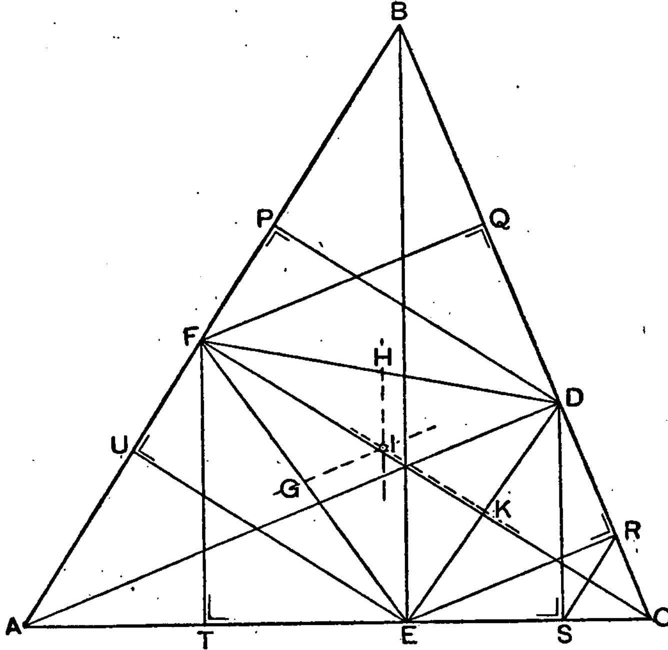


Fig. 1.

en G van △ HKG evenwijdig getrokken aan de hoogtelijnen, de bissectrices van △ HKG; KI // CF, enz. Hun snijpunt I is het middelpunt van de cirkel van Taylor.

Bewijs.

HI is de middelloodlijn van TS; KI van PU en GI van QR. In △ EDC loopt SR anti-parallel met ED, maar AB ook anti-parallel met ED, zodat RS // AB is.

Omdat KR = KS is, is ook IK middelloodlijn van RS.

Hieruit volgt: IT = IS = IR = IQ. Op gelijke wijze is IH middelloodlijn van PQ, waaruit dan verder volgt dat IQ = IP= IU is.

Vlissingen. D. de WAARD.

LXXIV*c*.

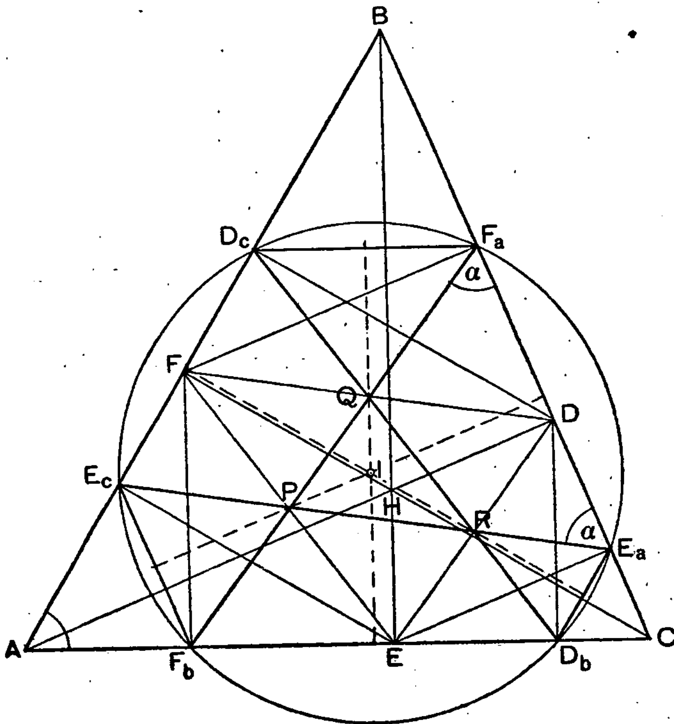


Fig. 2. **De cirkel van H. M. Taylor.**

Tweede bewijs. Vierhoek AEHF is gelijkvormig met vierhoek AD_bDD_c; dus D_bD_c // EF; in △ AEF is E_cF_b antiparallel met FE; dus ook met D_bD_c en evenwijdig met BC; evenzo F_aD_c // CA en D_bE_a // AB (door letterverschuiving; ook direct op de figuur te zien).

D_cD_b is antiparallel met E_cF_b, dus liggen E_c, F_b, D_b en D_c op een cirkel; F_aF_b is antiparallel met AB; dus liggen ook F_b, E_c, D_c en F_a op één cirkel; op dezelfde cirkel, omdat ze drie punten gemeen hebben. Ook gaat die cirkel door E_c, F_b, D_b en E_a; immers E_aE_c is antiparallel met AC.

Hiermee is het bewijs geleverd.

Van de ingeschreven zeshoek zijn de overstaande zijden evenwijdig; $E_cF_bF_aE_a$ is een ingeschreven trapezium, dus een gelijkbenig trapezium; dus is $E_aE_c = F_bF_a$ en beide gelijk aan D_cD_b. Het middelpunt van de cirkel is het snijpunt van de drie bimedianen; zie de stippellijnen. Natuurlijk zijn PE_aF_a en PF_bE_c gelijkbenige driehoeken met P als top; de bimediaan van E_aF_a en E_cF_b gaat dus door P en is de deellijn van ∠ P van △ PQR; de beide andere bimedianen

zijn de deellijnen van $\angle$ Q en $\angle$ R; hun snijpunt I is dus het middelpunt van de cirkel van Taylor door de zes punten D_b, D_c, E_c, E_a, F_a en F_b.

De lengte van de gelijke koorden D_bD_c, E_cE_a en F_aF_b is gemakkelijk uit te drukken in grootheden van $\triangle$ ABC; zie hiervoor de hulpfiguur, fig. 3, waarop AMK de middellijn is van de omgeschreven cirkel van $\triangle$ ABC. Vierhoek $AD_bDD_c \sim$ vierhoek ABKC; dus $D_bD_c : BC = AD : AK$;

$$D_bD_c = \frac{BC \times AD}{AR} = \frac{O}{R};$$

hierin stelt O de oppervlakte voor van $\triangle$ ABC en R de straal van zijn omgeschreven cirkel. Op fig. 2 zijn dus D_bD_c, E_cE_a en F_aF_b alle drie gelijk aan $\frac{O}{R}$.

Fig. 3.

Deze afleiding is heel eenvoudig. Begint men daarmee, dan kan men opmerken, dat op fig 2 de hoeken, waar α in staat, gelijk zijn; wegens het antiparallel zijn van E_aE_c met CA is immers die hoek bij E_a gelijk aan α; evenzo voor de andere. Uit het gelijk zijn van deze hoeken en $E_aE_c = F_aF_b$ volgt dan, dat $E_aE_cF_bF_a$ een gekruist gelijkbenig trapezium is. Het middelpunt wordt als boven gevonden. Dit derde bewijs is niet zo eenvoudig als het tweede.

$\triangle$ PQR is de figuur van de drie middenparallellen van de voetpuntsdriehoek DEF; elk van de gelijke koorden D_bD_c, E_cE_a en F_aF_b heeft een lengte, die gelijk is aan de omtrek van $\triangle$ PQR, dus aan de halve omtrek van $\triangle$ DEF.

P. W.

LXXV. *Onder dezelfde noemer brengen.*
Naar aanleiding van Korrel LXXI.

Prof. van Dantzig schreef: „Twee breuken tot een gemeenschappelijke noemer herleiden.”

P. W. gaf de voorkeur aan: „Onder dezelfde noemer brengen.”

E. J. D. vindt „gelijknamig maken” het allereenvoudigste.

Nu is dit laatste altijd nog een wiskundige vakterm, die door de leerlingen alleen maar na een behoorlijke voorafgaande definitie begrepen zal worden. Een bezwaar is dit echter niet.

Maar waarom zouden we niet ook gewoonweg zeggen: „Twee

breuken dezelfde noemer geven." We kunnen toch ook twee kinderen „dezelfde naam geven."

En heeft niet een groot wiskundige (naar ik meen Poincaré) gezegd: „Wiskunde is de kunst om verschillende dingen „dezelfde naam te geven" "?

Tiel. S. J. GEURSEN.

LXXVI.

Oplossing van de opgave, gesteld in Korrel LXXII.

Naar aanleiding van Korrel LXXII kwamen brieven binnen van Dr H. J. E. Beth, Dr H. Streefkerk en W. Eisberg. De redactie vond het geschikt deze samen te vatten tot het volgende.

Het antwoord op de vraag is zeer eenvoudig, en werd ook door den Heer Van Lent zelf aangegeven: een eeneenduidige verwantschap tussen twee lijnenwaaiers behoeft nog geen projectieve verwantschap te zijn.

Aan het bezwaar, dat de genoemde verwantschap niet of in het algemeen niet omkeerbaar eenduidig zal zijn, kan gemakkelijk tegemoet gekomen worden. Rekenen wij de hoek $\mu = \angle$ PAB tegen de klok van 0° (inclusief) tot 180° (exclusief), evenzo $\nu = \angle$ PBA met de klok mee tussen dezelfde waarden, en reduceren wij tenslotte alle hoekwaarden modulo 360°, dan verkrijgen wij zeker een eeneenduidige verwantschap tussen de lijnen van de beide waaiers. Nemen wij nu het volgende coördinatenstelsel: A(0, 0), B(c, 0) met $c > 0$; draaiing van de positieve x-as over 90° tegen de klok in geeft de positieve y-as. Dan bezit de meetkundige plaats van P de parametervoorstelling

$$x = \frac{c \operatorname{tg} \nu}{\operatorname{tg} \mu \operatorname{tg} \nu}, y = x \operatorname{tg} \mu,$$

waar μ en ν verbonden zijn door de betrekking $\mu : \nu = \alpha : \beta$ (α gemeten als μ en β als ν), en zijn vergelijking in x, y luidt

$$\beta \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \alpha \operatorname{arctg} \frac{y}{c - x}.$$

Voor $\alpha : \beta = 1 : 1$ komt een rechte lijn (de middelloodlijn van AB), voor $\alpha : \beta = 1 : 2$ of $2 : 1$ elk een hyperbool, voor $\alpha : \beta$ rationaal een algebraische en voor $\alpha : p$ irrationaal een transcendente kromme.

PUNTEN IN HET ONEINDIGE

door

A. HEYTING [1]).

Laat ik mijn beschouwingen over het zeer theoretische onderwerp der punten in het oneindige beginnen met een zeer practische kwestie. Het snijpunt S van twee lijnen *l* en *m* ligt buiten het tekenpapier; (wij noemen zo'n punt *onbereikbaar*); een punt P moet met S verbonden worden. Er zijn vele oplossingen van dit bekende vraagstuk. De volgende, aangegeven door Prüfer [2]), heeft verschillende voordelen. Zij is ook bij ongunstige ligging der gegevens, steeds uitvoerbaar en zij vereist slechts de eenvoudigste constructiepostulaten. Wij kiezen op *l* twee punten A en B en bepalen Q zo, dat AB en QS harmonische paren zijn; dit gaat met de bekende eigenschap van de volledige vierhoek (fig. 1a). Is Q bekend, dan levert dezelfde eigenschap de constructie van PS (fig. 2). Iets ingewikkelder wordt het vraagstuk, als een van de lijnen *l* en *m* zelf onbereikbaar is, dus gegeven door twee

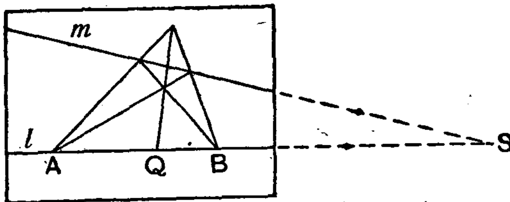


Fig. 1a.

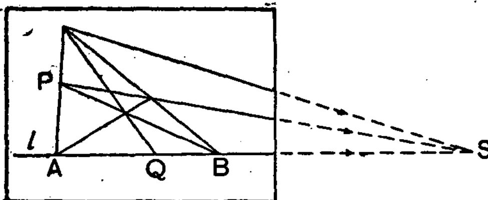


Fig. 2.
De bovenste lijn naar S heeft geen betekenis.

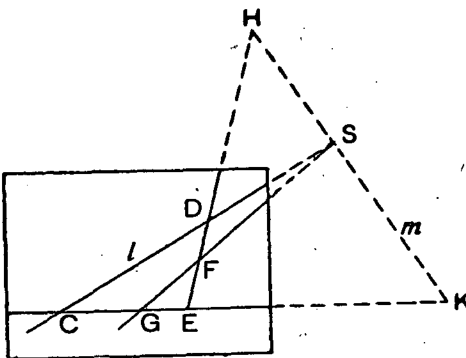


Fig. 3a.

[1]) Voordracht gehouden vanwege het Mathematisch Centrum op Dinsdag 29 Oct. 1946.
[2]) H. Prüfer, Projektive Geometrie. Leipzig 1935.

onbereikbare punten H en K (op hun beurt ieder als snijpunt van twee lijnen gegeven). Wij kiezen op l de punten C en D zo, dat CK en DH (op de zoeven aangegeven wijze te construeren) elkaar in een bereikbaar punt E snijden. Bepaal F en G zo, dat HF met DE en KG met EC harmonisch ligt. Dan gaat FG door S (fig. 3a), want projecteert men de harmonische paren CE en GK uit S op EH, dan moeten weer harmonische paren ontstaan.

Wat heeft dit alles nu met de punten in het oneindige te maken? Wel, laat de beschouwde onbereikbare punten ook voor de langste liniaal onbereikbaar zijn, d.w.z. laat ze in het oneindige liggen. Dan gaat fig 1a over in fig. 1b, die de oplossing geeft van het vraagstuk: gegeven twee evenwijdige lijnen; een op een dier lijnen gegeven lijnstuk middendoor te delen. Dezelfde figuur geeft aan, hoe men, als een gegeven punt buiten l en op l een lijnstuk AB met zijn midden Q gegeven zijn, door een gegeven punt buiten l de lijn evenwijdig met l kan trekken.

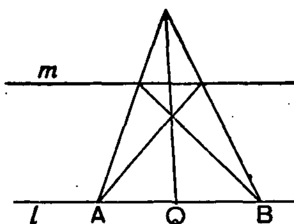


Fig. 1b.

Laten wij in fig. 3a de lijn m naar het oneindige verdwijnen, dan ontstaat fig. 3b, die ons leert, hoe men, als een parallelogram gegegeven is, een lijn kan trekken evenwijdig aan een gegeven lijn l. Het merkwaardige is, dat al deze constructies uitgevoerd worden met de liniaal alleen, nauwkeuriger met behulp van de constructiepostulaten: [1])

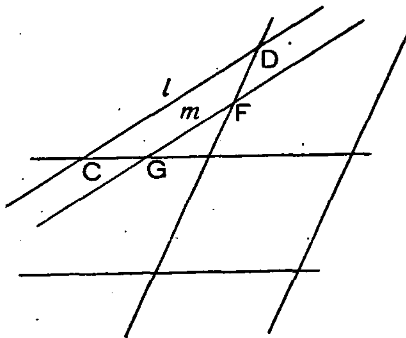


Fig. 3b.

A. Een punt construeren, al of niet behorend tot een gegeven of reeds geconstrueerde figuur, maar overigens willekeurig.

B1. De verbindingsrechte van twee punten bepalen.

B2. Het snijpunt van twee snijdende rechten bepalen.

Een dergelijke analogie tussen gewone en oneindig verre punten komt ons niet vreemd voor en wij zijn geneigd, die zonder veel kritiek te aanvaarden. Toch is het denkbeeld betrekkelijk jong. De

---

[1]) Overgenomen uit O. Bottema, De elementaire meetkunde van het platte vlak. Groningen 1938. Blz. 111.

gedachte, evenwijdige lijnen te behandelen alsof zij elkander in een oneindig ver punt snijden, is het eerst duidelijk uitgesproken en systematisch toegepast door Desargues in zijn in 1639 verschenen „Brouillon project" [1]). Waarschijnlijk is hij er toe gekomen door zijn studie van de perspectief; daar zag hij (en in zijn werk over dit onderwerp spreekt hij er uitvoerig over), hoe een bundel evenwijdige lijnen in de projectie overgaat in een bundel lijnen door een punt. Desargues voert nu voor de beide soorten bundels één woord in (*ordonnance*), dat dus met ons „bundel" overeenkomt, en zegt, dat de rechten uit een bundel steeds naar een zelfde *but* streven, dat of in het oneindige ligt, of een punt is. Dezelfde methode van naamgeving past hij in andere gevallen toe. Hij ziet in, dat kegel en cylinder onder een begrip gebracht kunnen worden, waarvoor hij de naam *rouleau* invoert. Ligt de top van de rouleau in het oneindige, dan is hij een cylinder; ligt de top in het eindige, dan is hij een kegel. Hij kent ook de rechte in het oneindige van een vlak, ingevoerd met behulp van de twee soorten vlakkenbundels. Dat dit begrip hem nog moeilijkheden geeft, blijkt bij de theorie van pool en poollijn. Hij weet, dat de poollijn van een oneindig ver punt een middellijn is, maar het geval, dat de poollijn van een punt de oneindig verre rechte zou zijn, verklaart hij voor onvoorstelbaar; hij zegt niet, dat de pool in dit geval het middelpunt is. Op één punt schijnt het, dat hij over het vlak in het oneindige spreekt. Hij behandelt de doorsnede van een kegel met een vlak dat niet door de top gaat en zo gelegen, dat de rechte, die de kegel beschrijft, somtijds evenwijdig aan dat vlak loopt; nu volgt de opmerking: „l'euenement de cette espèce est du tout inimaginable .... pour l'espèce nommée cone quand la rencontre est a distance infinie." Het is mij niet duidelijk, hoe deze zin anders geinterpreteerd kan worden [2]).

Het werk van Desargues is verloren gegaan en eerst in 1845 teruggevonden. Toch heeft zijn geniale gedachte ongetwijfeld indruk gemaakt op de geleerden van zijn tijd en schijnt zij ook geleidelijk verder doorgedrongen te zijn. Als Poncelet in 1822 de methode der centrale projectie ten grondslag legt aan zijn Traité des propriétés projectives, blijken de oneindig verre punten burgerrecht verkegen te hebben; hij spreekt van een „notion généralement admise". Meer moeite heeft hij met de oneindig verre rechte van een vlak; hij spreekt hierover als een „notion purement méta-

[1]) Oeuvres des Desargues, réunies et analysées par M. Poudra. Paris 1864. Blz. 97—230; commentaar blz. 243—302.

[2]) L.c. blz. 162.

physique" en later „notion paradoxale". Ten slotte acht hij het begrip voldoende gefundeerd door de opmerking, dat de oneindig verre rechte door projectie uit een gewone rechte kan ontstaan. Bij Poncelet vindt men ook de opvatting, die hij „notion nouvelle et paradoxale" noemt en die dus blijkbaar van hem afkomstig is, dat de punten in het oneindige van de ruimte een plat vlak vormen. Hij geeft voor deze opvatting verscheidene motiveringen, waarvan ik alleen de eerste weergeef. De hoofdeigenschap („caractère principal") van een plat vlak is, dat zij door ieder ander plat vlak volgens een rechte lijn gesneden wordt; dit geldt nu juist ook voor de verzameling der punten in het oneindige van een vlak, zodat deze als een plat vlak beschouwd moet worden. In de laatste gevolgtrekking ligt een toepassing opgesloten van het door Poncelet opgestelde „principe de continuité", waarop wij nu niet verder kunnen ingaan.

Veel moeite heeft Poncelet met de richting van de oneindig verre rechte van een vlak; deze is blijkbaar onbepaald, want iedere rechte lijn kan door evenwijdige verplaatsing in de oneindig verre rechte overgaan. Hij stiet hier op een moeilijkheid van algemene aard: in vele opzichten kan men met de oneindig verre punten werken als met gewone punten, maar niet in alle opzichten. Zodra van hoeken of afstanden sprake is, gaat de analogie niet meer op. Tot de oplossing van de vraag, hoe ver de analogie gaat, heeft juist het werk van Poncelet veel bijgedragen. De eigenschappen, die voor de oneindig verre punten geldig blijven, zijn blijkbaar juist de „propriétés projectives", die bestand zijn tegen centrale projectie, want deze voert de oneindig verre punten in gewone over. Tot de projectieve begrippen behoort het begrip „richting" niet.

Zo schijnt een tamelijk bevredigende theorie van de punten in het oneindig verkregen te zijn, maar bij nader inzien is zij verre van streng. Dat is niet te verwonderen, want de elementaire meetkunde rustte naar onze begrippen op zeer weinig strenge grondslagen. Tot dicht bij het einde van de vorige eeuw zweeft de meetkunde tussen natuurkunde en wiskunde in. De ruimte der wiskundigen heeft zich nog niet afgescheiden van de ervaringsruimte. In de bewijzen wordt, zij het in afnemende mate, gebruik gemaakt van gegevens, aan de aanschouwing ontleend. In dit stadium van ontwikkeling kon de invoering van oneindig verre punten niet streng zijn.

Laten wij nu aannemen, dat de Euclidische meetkunde streng gefundeerd is, hetzij op een stelsel axioma's, hetzij analytisch, en ons afvragen, hoe wij nu oneindig verre punten kunnen invoeren.

Het meest voor de hand ligt misschien deze methode. Nu de opbouw der meetkunde abstract is gemaakt, is er niets dat ons verhindert, zoveel ruimten opgebouwd te denken als wij willen, met willekeurige dimensiegetallen. Naast het Euclidische vlak α denken wij ons dus een rechte lijn l en een punt P; l en P vormen samen de puntverzameling ω. Nemen wij uit een cirkel γ in α (middelpunt M) een punt A weg, dan kunnen wij de overige punten van γ een-eenduidig op die van l afbeelden, en wel met behoud van orderelaties; aan A voegen wij P toe, zodat γ een-eenduidig op ω afgebeeld is. Is aan C op γ toegevoegd O op ω, dan wordt O toegevoegd als „oneindig ver punt" aan alle lijnen evenwijdig met MC. Het nadeel van deze methode is, dat de oneindig verre punten van het begin af een bijzondere rol spelen, zodat er lastig een overzicht te krijgen is van de eigenschappen, die er voor geldig blijven.

Hetzelfde bezwaar geldt tegen een andere dikwijls gevolgde methode. Men defineert niet de punten in het oneindige zelf, maar alleen de uitdrukking „de lijnen l en m snijden elkander in een oneindig ver punt" als „l is evenwijdig met m". De woorden „oneindig ver punt" vormen nu wat men in de logica noemt een *onvolledig symbool,* d.w.z. zij hebben niet afzonderlijk, maar alleen in de genoemde combinatie een zin. Dit is een groot nadeel, want men kan nu bijv. niet spreken van de verzameling van alle punten in het oneindige.

Eerst wanneer de punten in het oneindige zo ingevoerd worden, dat zij ten volle gelijkwaardig zijn aan de overige punten, kan men het volle profijt van hun invoering trekken. De eerste, die aan deze eis voldaan heeft, was Pasch [1]). Zijn werk is belangrijk genoeg, om er wat langer bij stil te staan. Pasch was overtuigd, zelfs fel, empirist. Hij beschouwde de ervaring als de enige bron van alle, ook wiskundige, kennis. Het is merkwaardig, dat hij tengevolge van dit empiristische standpunt de grondlegger is geworden zowel van de moderne axiomatische behandeling der meetkunde in het algemeen als van de onafhankelijk van de Euclidische meetkunde opgebouwde projectieve meetkunde. Hij zag namelijk in, dat van de wiskunde alleen enige grondbegrippen en grondstellingen aan de ervaring ontleend kunnen worden en kwam zo tot de opstelling van het programma, alle overige stellingen zuiver logisch uit de grondstellingen af te leiden. Wat de grondstellingen zelf betreft, de ervaring kan ons slechts iets leren over een eindig deel van de ruimte. Pasch stelt dus zijn axioma's zó op, dat zij in

1) M. Pasch. Vorlesungen über neuere Geometrie. Leipzig und Berlin 1882.

een eindig deel van de ruimte vervuld zijn. Iets als een parallelen-axioma zoekt men bij hem tevergeefs. Een grote verdienste is, dat hij voor het eerst de eigenschappen over de ordening der punten van een lijn in axioma's vastlegt. Om nu zijn ruimtedeel tot de hele ruimte uit te breiden, voert hij de zogenaamde *oneigenlijke punten* in. Essentieel bij deze beschouwing is, dat hij zich niet tot het platte vlak beperkt, maar in drie dimensies werkt. Laten l en m twee lijnen zijn, die in een vlak liggen. Een lijn λ, die niet in het vlak van l en m ligt, wordt gezegd, tot de *schoof* (l, m) te behoren, als zij zowel met l als met m in een vlak ligt. Uit zijn axioma's leidt Pasch af, dat twee willekeurige lijnen uit de schoof in een plat vlak liggen. Daarna is het niet moeilijk, te definiëren, welke lijnen uit het vlak l en m tot de schoof behoren, en aan te tonen, dat twee willekeurige lijnen uit de schoof dezelfde schoof bepalen. Snijden l en m elkaar in een eigenlijk punt, dan bestaat schoof (l, m) natuurlijk uit alle lijnen door hun snijpunt. Pasch merkt op, dat hij voor het vervolg het woord *punt* geheel zou kunnen vermijden, door steeds over lijnenschoven te spreken. Hij geeft er echter de voorkeur aan, te zeggen, dat iedere lijnenschoof een punt bepaalt; bij snijdende lijnen is dit de top, bij niet snijdende een *oneigenlijk punt*. Hierdoor breidt hij zijn eindige ruimtedeel uit de volledige ruimte en tegelijk voert hij de punten in het oneindige in. Interpreteren wij namelijk het ruimtedeel, waarvan hij uitgaat, als een stuk van de Euclidische ruimte, dan is ook een verzameling evenwijdige lijnen een schoof, maar op grond van de axioma's zijn deze schoven niet van andere met oneigenlijke top te onderscheiden. Het is dan ook volkomen willekeurig, het oorspronkelijke ruimtedeel als een stuk van de Euclidische ruimte te interpreteren; de axioma's gelden evengoed voor delen van andere ruimten, bijv. de niet-euclidische. Wij drukken ons beter uit, door te zeggen, dat Pasch zijn ruimtedeel uitbreidt tot de volledige projectieve ruimte.

Laat ik op het bewijs van de eerste fundamentele stelling van Pasch nog iets verder ingaan. De stelling luidt: Ligt elk van de lijnenparen lm, $l\lambda$, $m\lambda$, $l\mu$, $m\mu$ in een plat vlak, maar liggen geen drie van deze lijnen in een plat vlak, dan liggen ook $\lambda\mu$ in een plat vlak. Deze stelling spreekt vanzelf, zodra van een van de genoemde lijnenparen het snijpunt bestaat; ze moet echter ook bewezen worden voor het geval, dat de lijnen elkander niet in een eigenlijk punt snijden.

Wij bewijzen eerst een hulpstelling. Laat elk der paren lm, $l\lambda$, $m\lambda$ in een vlak liggen, maar niet alle drie in een vlak. Op l kiezen

wij twee punten A en B, zodat noch m, noch λ een punt van het segment AB bevat. In vlak lm kiezen wij een punt C aan de andere kant van m dan A en B. (Dat dit alles mogelijk is, moet natuurlijk uit de axioma's afgeleid worden). Nu construeren wij de punten D, E, F, G op de in fig. 4 aangegeven wijze. Ook het bestaan van deze eigenlijke punten wordt bewezen, waarbij de ordeningsaxioma's een belangrijke rol spelen. Daarna wordt de analoge constructie uitgevoerd in vlak $l\lambda$, waarbij de rol van C overgenomen is door F'. Wij willen bewijzen, dat F'C' door hetzelfde punt G van l gaat als CF. Nu snijdt CC' zowel DD' als EE'; DD' en EE' liggen in vlak $m\lambda$, maar CC' niet, dus bestaat het snijpunt S van DD' en EE' en CC' gaat door S.

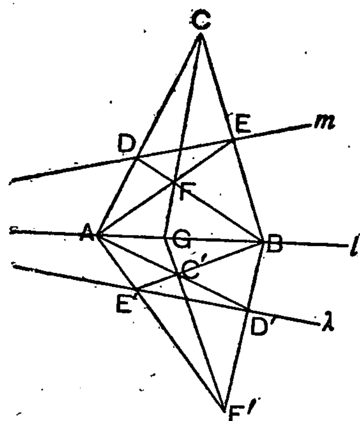


Fig. 4.

Evenzo blijkt, dat FF' door S gaat. Daar nu CC' en FF' elkaar snijden, gaat F'C' door G.

De stelling is gemakkelijk om te keren: Liggen lm en $l\lambda$ telkens in een vlak, maar niet alle drie in hetzelfde vlak, en gaan de hierboven geconstrueerde lijnen CF en F'C' door een punt G, dan liggen ook $m\lambda$ in een vlak.

Nu gaan wij over tot het bewijs van de hoofdstelling. Wij voeren dezelfde constructie als in vlak $l\lambda$ ook uit in vlak $l\mu$, waardoor een lijn F''C'' ontstaat, die ook door G gaat. Uit het feit, dat C'F' en C''F'' elkander snijden, volgt dan, dat $\lambda\mu$ in een plat vlak liggen.

Het is nu verder nodig, oneigenlijke lijnen en vlakken in te voeren en te bewijzen, dat hiervoor de gewone projectieve incidentiestellingen gelden. Het zou ons te ver voeren, hier nu op in te gaan. Van principieel belang is de opmerking, dat de woorden „oneigenlijk punt" bij Pasch nog het karakter hebben van een onvolledig symbool; men kan dit er aan ontnemen, door te definiëren: „een punt is een lijnenschoof". De eigenlijke punten kunnen dan een-eenduidig met behoud van incidentierelaties op een deelverzameling van de verzameling der punten (= schoven) afgebeeld worden, zodat de laatste verzameling in deze zin als uitbreiding van het oorspronkelijke ruimtedeel kan gelden.

Vergelijken wij fig. 4 met fig. 1a, dan blijkt een nauw verband

te bestaan tussen deze theorie van Pasch en de constructies, waarmee ik ben begonnen. Het belangrijkste onderscheid is, dat ik daar het bestaan van de onbereikbare punten van te voren heb aangenomen, terwijl Pasch zijn oneigenlijke punten definieert, uitgaande van het eindige ruimtedeel.

Na Pasch heeft men de projectieve meetkunde ook ineens in haar geheel op axioma's gefundeerd. Ook is zij als getallenruimte opgebouwd. Bij de laatste opvatting, die eigenlijk reeds van Riemann afkomstig is en door Felix Klein op de projectieve ruimte werd toegepast, definiëert men een punt van de ruimte als de verhouding van vier getallen x_0, x_1, x_2, x_3, die niet alle nul zijn. Een plat vlak is de verzameling der punten, wier verhoudingsgetallen aan een homogene vergelijking van de eerste graad voldoen, enz. Vóor beide wijzen van opbouw der projectieve ruimte is kenmerkend, dat het begrip „oneindig ver punt" er in het geheel niet in voorkomt. Alle punten zijn gelijkwaardig. Om dit nauwkeuriger te formuleren, herinneren wij er aan, dat de projectieve meetkunde slechts die begrippen en eigenschappen behandelt, die invariant zijn tegenover projectieve transformaties; deze worden het eenvoudigst analytisch gedefinieerd als de homogene lineaire transformaties met van nul verschillende determinant. Door zulk een transformatie kan men ieder punt in ieder ander punt transformeren, waarmee de projectieve gelijkwaardigheid der punten is aangetoond. Wij zijn nu in staat, de weg, waardoor vroeger de oneindig verre punten aan de Euclidische ruimte werden toegevoegd, in omgekeerde richting te doorlopen: door uit de projectieve ruimte de punten van een willekeurig vlak ω weg te nemen, houden wij een affiene ruimte over, waarvoor de punten van ω de rol van punten in het oneindige spelen. Om dit analytisch door te voeren, kiezen wij in de projectieve ruimte het coördinatenviervlak zo, dat ω de vergelijking $x_0 = 0$ heeft. Daar ω een bijzondere rol gaat spelen, dienen wij de groep, die aan de meetkunde ten grondslag ligt, te beperken tot die transformaties, die ω invariant laten; dat zijn de transformaties van de vorm

$$\begin{cases} y_0 = x_0. \\ y_1 = a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3. \\ y_2 = a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3. \\ y_3 = a_{30}x_0 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3. \end{cases}$$

Blijkbaar speelt x_0 geen rol meer als coördinaat. Daar de punten, waar $x_0 = 0$, zijn uitgeschakeld, kan men $x_1/x_0 = x$, $x_2/x_0 = y$,

$x_3/x_0 = z$ stellen, waardoor de transformatie de vorm krijgt:

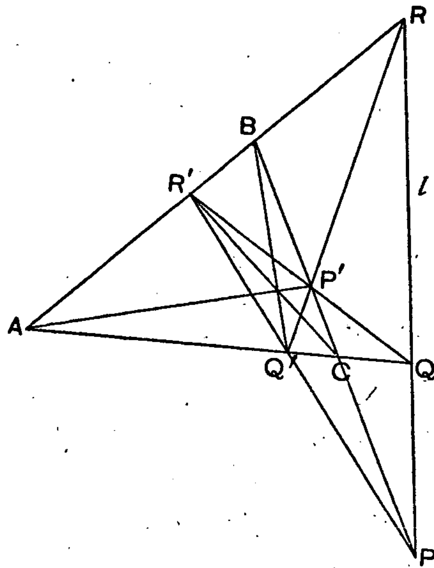
$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{10}. \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{20}. \\ z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{30}. \end{cases}$$

Dit zijn juist de formules voor een affiene transformatie in de gewone ruimte. Blijkbaar zijn de lijnenparen, wier snijpunt op ω lag, in de affiene ruimte tot evenwijdige lijnen geworden; de affiene transformaties voeren evenwijdige lijnen weer in evenwijdige lijnen over.

Na dit overzicht van de wijzen, waarop men de oneindig verre punten kan invoeren, willen wij vluchtig nagaan, welke diensten zij ons kunnen bewijzen. Daarbij hebben wij niet het oog op de eigenlijke projectieve meetkunde, die historisch ontstaan is door aanvulling van de Euclidische ruimte met de oneindig verre punten, maar in haar moderne vorm dat begrip in het geheel niet kent. Belangrijk is echter, dat de zoëven geschetste overgang van de projectieve op de affiene meetkunde ons in staat stelt, stellingen uit de affiene meetkunde als bijzondere gevallen van projectieve stellingen te zien. Als voorbeeld noem ik slechts de theorie der toegevoegde middellijnen van een kegelsnede, die als bijzonder geval in de theorie van pool en poollijn uit de projectieve meetkunde bevat is. Twee toegevoegde middellijnen vormen met de oneindig verre rechte een pooldriehoek, enz. Omgekeerd kan dikwijls een stelling uit de affiene meetkunde onmiddellijk tot een projectieve stelling uitgebreid worden. Zo is uit de Euclidische meetkunde bekend, dat bij twee driehoeken, wier overeenkomstige zijden evenwijdig lopen, de verbindingslijnen van overeenkomstige hoekpunten door een punt gaan of evenwijdig zijn. Voegt men de oneindig verre punten toe, dan wordt dit: Snijden de overeenkomstige zijden van twee driehoeken elkander in punten van de oneindig verre rechte, dan gaan de verbindingslijnen van overeenkomstige hoekpunten door een punt. Nu kan men door een projectieve transformatie de oneindig verre rechte in iedere rechte van het projectieve vlak overvoeren; de overige eigenschappen der figuur zijn tegen projectieve transformatie bestand. Wij hebben dus direct de algemene driehoeksstelling van D e s a r g u e s: snijden de paren overeenkomstige zijden van twee driehoeken elkaar in punten van eenzelfde lijn, dan gaan de verbindingslijnen van overeenkomstige hoekpunten door een punt.

Nog een voorbeeld. Wij gaan uit van de stellingen, dat de

zwaartelijnen van een driehoek door een punt gaan, en dat de lijn, die de middens van twee zijden van een driehoek verbindt, evenwijdig loopt met de derde zijde (Fig. 5a). Vervangen wij hier



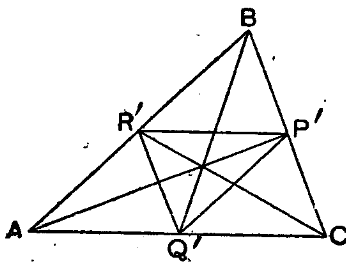


Fig. 5a.

Fig. 5b.

de oneindig verre rechte door een willekeurige lijn uit het projectie vlak, dan vinden wij: (fig. 5b) snijdt de lijn *l* de zijden AB, BC, CA van driehoek ABC in R, Q, P en zijn PP′, BC harmonische paren, evenals QQ′, CA en RR′, AB, dan gaan AP′, BQ′ en CR′ door een punt, P′Q′ gaat door R, Q′R′ door P en R′P′ door Q.

Het is merkwaardig, dat reeds D e s a r g u e s een voorgevoel van deze methode heeft gehad. Bij zijn behandeling van de theorie van pool en poollijn merkt hij namelijk op, dat er twee methoden zijn om stellingen uit die theorie te bewijzen. De eerste bestaat hierin, dat men de stelling eerst voor een cirkel bewijst en dan door projectie op een willekeurige kegelsnede overdraagt. De tweede drukt hij zo uit: „Ou bien de ce que dessus la chose est euidente en quelconque diametrale dont ensuite elle se conclud en quelconque autre droite” [1]).

Nog veel productiever wordt de methode, wanneer men in het projectieve vlak niet alleen een lijn *l* als oneindig verre rechte, maar nog twee punten I en J van *l* als *cirkelpunten* een bijzondere rol laat spelen. Wil men tot een met de gewone Euclidische over-

---

[1]) Oeuvres blz. 194.

eenkomende meetkunde komen, dan moet men I en J toegevoegd complex nemen. Door reële coördinatentransformatie kan men dan aan I en J de coördinaten (0, 1, i) en (0, 1, $-i$) geven. Daardoor krijgen de projectieve transformaties, die I en J invariant laten, de vorm (na invoering der niet-homogene coördinaten x. y)

$$\begin{cases} x' = c \cos \varphi \, x - c \sin \varphi \, y + a. \\ y' = c \sin \varphi \, x + c \cos \varphi \, y + b. \end{cases}$$

Dit zijn juist de formules voor een Euclidische gelijkvormigheidstransformatie. Het is bekend, hoe men vele metrische begrippen aldus tot projectieve kan terugbrengen; het zou mij te ver van onderwerp afvoeren, daar nu op in te gaan.

Zoals U bemerkt, heb ik mij verder de beperking opgelegd, uitsluitend te spreken over oneindig verre punten, die het Euclidische vlak aanvullen tot het projectieve vlak. Ik stip slechts aan, dat men in het hyperbolische vlak aan iedere rechte lijn twee punten in het oneindige dient toe te kennen, en dat het soms nuttig kan zijn, het Euclidische vlak op andere wijze aan te vullen dan tot het projectieve vlak, zoals in de cirkelmeetkunde, waar men het Euclidische vlak aanvult met één punt in het oneindige, dat geacht wordt, op iedere rechte lijn te liggen.

Liever dan op al deze zaken in te gaan, wil ik nog iets zeggen over de rol van de oneindig verre punten in de schoolwiskunde. Het komt mij voor, dat deze uiterst bescheiden dient te zijn. Zodra men over oneindig verre punten begint te spreken, ontstaan voor de leerlingen grote moeilijkheden. Zij moeten trachten te begrijpen (ik citeer een bekend leerboek der analytische meetkunde): „of men zegt, dat twee evenwijdige lijnen geen snijpunt hebben dan wel een snijpunt in het oneindige, komt op hetzelfde neer; het laatste punt is geheel denkbeeldig ." „Hoe paradoxaal het ook moge schijnen dat men, naar weerszijden een lijn vervolgende, tot een zelfde punt in het oneindige zou geraken, toch moet men dit wel aannemen, wil men het axioma handhaven, dat door twee punten slechts één rechte lijn kan gaan; . . ." „Vragen wij ten slotte naar de meetkundige plaats van alle oneindig verre punten van een vlak, dan moeten we deze noodzakelijk als een rechte lijn opvatten, ..., dus niet als een cirkel, zoals men bij oppervlakkige beschouwing zou menen — daar de rechte lijn zelf de enige is, die door iedere rechte in één punt wordt gesneden." Met deze citaten wil ik geen leerboek afkammen; ik geloof niet, dat het veel beter kan, als men oneindig verre punten op de school wil invoeren. Maar niemand zal wel bestrijden, dat deze beschouwingen voor de leerlingen moeilijk zijn. En dat is nog lang niet het ergste. Men tracht

toch de leerlingen er van te doordringen, dat in de wiskunde weliswaar de grondbegrippen en grondstellingen aan de ervaring worden ontleend, maar dat men er naar streeft, na de scherpe formulering van die grondbegrippen en grondstellingen zo zuiver mogelijk logisch te redeneren. Op deze doelstellingen berusten belangrijke argumenten voor de waarde van het wiskunde-onderwijs. En nu krijgen de leerlingen opeens een betoog voorgezet, dat met alle voorstelling spot en anderzijds door geen enkel behoorlijk argument gefundeerd wordt. De invoering der oneindig verre punten zelf maakt de indruk van een slordige wijze van uitdrukken, waarbij men terwille van het gemak iets anders zegt dan men eigenlijk bedoelt; de oneindig verre rechte wordt ingevoerd door een slap analogie-argument. Moet zo niet de indruk gewekt worden, dat de wiskunde haar strengheid niet erg ernstig opvat en dat ze die laat varen waar het in haar kraam te pas komt? Zijn zulke redeneringen niet koren op de molen van hen, die de waarde van onderwijs in de wiskunde ontkennen? Willen de leerlingen een enigszins juiste indruk van de wiskunde en haar methoden krijgen, dan is in de eerste plaats nodig, dat bij het onderwijs zoveel mogelijk de rechte, dat is de strenge weg gevolgd wordt. Nu weet ik heel goed, dat dit niet altijd kan, maar voor elke afwijking van de rechte weg moet dan toch een goede reden bestaan. Die zou hier inderdaad aanwezig zijn, als de invoering van de oneindig verre punten een grote vereenvoudiging bereikt werd. Maar dit is, meen ik, in het geheel niet het geval. Het grote nut van de oneindig verre punten blijkt eerst, zoals wij gezien hebben, na de opbouw van de projectieve ruimte, waarin zij geen bijzondere rol meer spelen. Zover komt men op de school zeker niet. Het blijft bij enkele incidentele toepassingen. Laat ik enkele daarvan nog even beschouwen.

Twee cirkels hebben een machtlijn, behalve als hun middelpunten samenvallen. Deze uitzondering verdwijnt, als men in het laatste geval de oneindig verre rechte als machtlijn beschouwt. Maar daardoor voert men meteen een groot aantal uitzonderingen in. De meetkundige plaats van de punten, die gelijke macht hebben ten opzichte van twee cirkels, is de machtlijn, behalve als deze in het oneindige ligt. Men kan de uitzondering niet laten verdwijnen, door oneindig grote machten in te voeren, want dan bestaat voor twee willekeurige cirkels de bedoelde meetkundige plaats uit de machtlijn plus de oneindig verre lijn. Het voordeel, door de invoering der oneindig verre punten behaald, lijkt mij nu niet bijster groot.

Moeten de leerlingen de asymptoten van een hyperbool niet leren zien als de raaklijnen in een oneindig ver punt? Ik geloof, dat het

belangrijker is, dat zij ze als asymptoten leren zien. Substitueren wij $y = mx + n$ in de vergelijking $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$, dan komt er

$$(b^2 - a^2m^2)x^2 - 2a^2mnx - a^2(n^2 + b^2) = 0. \qquad (1)$$

Is $m = \pm\, b/a$, dan wordt deze vergelijking van de eerste graad en is er dus slechts één snijpunt; is bovendien $n = 0$, dan snijdt de rechte de hyperbool niet. Dit bevredigt niet, omdat er niet uit blijkt, hoe de asymptoten ten opzichte van de kromme liggen. Om dit duidelijk te maken, dient men na te gaan, wat met de wortels van $ax^2 + bx + c = 0$ gebeurt, als a tot nul nadert. Uit de formule leidt men gemakkelijk af: nadert a tot nul, terwijl b een van nul verschillende waarde behoudt, dan neemt een der wortels boven iedere grens toe, terwijl de andere eindig blijft. Is $a = 0$ geworden, dan is er natuurlijk maar een wortel meer. Nadert ook b tot nul en blijft c van nul verschillend, dan neemt ook de tweede wortel boven elke grens toe, om voor $b = 0$ niet meer te bestaan. Toepassing op (1) geeft bij meetkundige interpretatie alle gewenste inlichtingen over de ligging van de asymptoot. Ik behandel de asymptoten van algebraïsche krommen altijd op deze manier. Zolang ik geen projectieve meetkunde doe, zijn de punten in het oneindige taboe; in de systematische behandeling van projectieve meetkunde komt dan de interpretatie van de asymptoten als raaklijnen in oneindig verre punten ter sprake.

Tegenover de grote nadelen van de invoering van oneindig verre punten staan dus slechts geringe, twijfelachtige voordelen. Ik meen daarom, dat men er bij het onderwijs in analytische meetkunde op het gymnasium beter in het geheel niet over spreekt.

Enigzins anders ligt de zaak bij kwesties van meer projectief karakter, zoals die vooral in de beschrijvende meetkunde voorkomen. Vooral voor leerlingen met beperkt voorstellingsvermogen kan het een belangrijke ontlasting van het geheugen betekenen, wanneer zij affien verschillende constructies als bijzondere gevallen van een zelfde constructie leren zien. Om bij een eenvoudig voorbeeld te blijven: de constructie van twee vlakken, waarvan de verticale doorgangen evenwijdig lopen. Het ligt voor de hand, hier het oneindig verre snijpunt van die doorgangen een rol te laten spelen. Maar ook hier zou ik aan die beschouwingswijze geen bewijskracht willen toekennen. De leerling dient de gevolgde constructie steeds langs orthodox-euclidische weg te kunnen motiveren; de beschouwing over het oneindig verre punt dient slechts, om ze gemakkelijker te onthouden. De oneindig verre rechte doet dus dienst als ezelsbrug. Waarom ze zich daartoe zo goed leent, begrijpen de leerlingen zo niet, maar dit ideaal is, naar ik zoëven heb betoogd, onbereikbaar zonder zeer grote nadelen op de koop toe te nemen.

ABSTRACTE MEETKUNDE EN HAAR BETEKENIS VOOR DE SCHOOLMEETKUNDE

door

Mr. J. VAN IJZEREN [1]).

Alle wiskunde is abstractie. Maar voor velen ligt het aantrekkelijke van de meetkunde in de directe aansluiting bij de „concrete werkelijkheid". Men voelt zich op zijn gemak bij de axioma's van Euclides en lange tijd zijn zij beschouwd als „waarheden".

Intussen zijn a.h.w. sportiever opvattingen ontstaan over het begrip axioma. Er wordt niet meer gevraagd of het axioma „waar" is, maar het wordt aanvaard als spelregel. En met zulke spelregels kan een enorme variatie van meetkundige spelen gearrangeerd worden. Alleen: geen vals spel! Geen onderlinge tegenstrijdigheid der axioma's.

Met abstracte meetkunde bedoel ik zulke meetkundige spelen of met een serieuzer woord „stelsels", die los van de werkelijkheid staan, maar toch die gedeeltelijk overeenstemming vertonen, die vergelijking mogelijk maakt.

Een voorbeeld. We aanvaarden drie axioma's, die ook in de gewone Euclidische meetkunde gelden:

1. door twee punten gaat een rechte;
2. door een punt buiten een rechte gaat één parallel;
3. de stelling van Pappus. (De inhoud hiervan doet voor het betoog niets ter zake, maar zij volledigheidshalve meegedeeld: heeft een zeshoek, beschreven in 2 rechten, twee paar parallele overstaande zijden, dan is ook het derde paar parallel.)

Maar bovendien aanvaarden we een „onwerkelijk" axioma:

4. als een segment AB zesmaal met zich zelf verlengd wordt, zodat $AB = BB_1 = B_1B_2 = \dots = B_5B_6$, dan valt het verkregen punt B_6 met A samen..

Uit deze vier axioma's kunnen allerlei stellingen worden afgeleid. Het gelukt zelfs op soortgelijke manier als in het gewone tekenvlak om alles in analytische formules weer te geven. Hoe ziet die analytische meetkunde er dan uit? Uiterlijk precies hetzelfde als de

[1]) Voordracht gehouden van wege het Mathematisch Centrum op Dinsdag 29 Oct. 1946.

gewone analytische meetkunde: punt is een getallenpaar, rechte is een lineaire vergelijking enz. Echter moet men geen reële getallen gebruiken, maar alle berekeningen in een ander stelsel uitvoeren; nl. rekenen met de getallen 0, 1, ... 6 modulo 7.

Zo vindt men, dat op de rechte $2x + 4y + 5 = 0$ de volgende punten liggen: (0,4) (1,0) (2,3) (3,6) (4,2) (5,5) (6,1). Men ziet hierbij dat uit het segment (0,4) (1,0) door successieve afpassing de punten (2,3) enz. gevonden worden en dat men tenslotte in (0,4) terugkeert. Geheel in overeenstemming met axioma 4. Precies hetzelfde geldt voor elke andere rechte.

Verder vindt men: door elk punt gaan 8 rechten; bv. door $O : y = 0, y = x, y = 2x, \ldots\ldots y = 6x$ en tenslotte ook $x = 0$. Op een cirkel liggen 8 punten; bv. op $x^2 + y^2 = 4^2 = 2$: (0,4) (0,3) (4,0) (3,0) (1,1) (1,6) (6,1) (6,6).

Het totale aantal punten is blijkbaar 49. M.a.w. we hebben een „vlak" van 49 punten [1]).

We kunnen nu ook de gehele gedachtengang omkeren en constateren (door narekenen), dat deze analytische meetkunde met 49 punten een meetkundig stelsel is, waarin aan de regels 1, 2, 3 en 4 voldaan wordt. Zo blijkt, dat axioma 4 — hoe „onwerkelijk" ook — niet met de eerste drie in strijd is.

Om nu een duidelijk beeld voor ogen te hebben, beperk ik mij tot dit speciale soort meetkundige stelsels [2]). Zij ontstaan door te werken met de gewone analytische formules, maar daarbij een ander getallenstelsel dan de reële getallen te gebruiken.

Wat is een getallenstelsel? Ruwe omschrijving: een verzameling van dingen, waarmee men kan optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen volgens de bekende regels. Bij het middelbaar onderwijs komen drie getallenstelsels (lichamen) ter sprake: de rationale, reële en complexe getallen. Maar het boven gegeven voorbeeld laat reeds een andere mogelijkheid zien. Dergelijke eindige getallenstelsels zijn er even zoveel als er priemgetallen zijn. Neem 0, 1, 2 enz. $p - 1$ en reken modulo p (priem), dan is volgens een stelling uit de rekenkunde het delen steeds en ondubbelzinnig mogelijk. Zo is bv. $^3/_4$ bij modulo 7 rekenen gelijk aan 6; immers

---

[1]) Deze punten vormen met de 56 rechten een „configuratie". Voor het verband met de configuraties van de gewone meetkunde, zie O. Bottema, Über endliche Geometrien, Proceedings Kon. Ak. v. W. Vol XXXII no. 9, 1926.

[2]) Wie zich algemeen wil oriënteren neme het suggestieve werk van K. Reidemeister, Grundlagen der Geometrie, Springer, 1930.

$3 . 6 = 4 \bmod 7$. Bij modulo 6 rekenen is echter geèn getal te vinden, dat gelijk is aan $^6/_4$. 6 is dan ook geen priemgetal.

We kunnen dus naar verkiezing andere meetkundige stelsels opbouwen en daarin narekenen, dat gewone bekende stellingen geldig blijven. Bijvoorbeeld: met 0, 1, 2, --- 10 modulo 11 rekenend krijgt men een analytische meetkunde met 121 punten. Gebruik nu de gewone formules (dus bv. $m_1 m_2 = -1$ bij loodrechte stand) dan blijkt, dat de hoogtelijnen van driehoek (0,1) (2,3) (5,8) door (8,5) gaan; dit is dus het hoogtepunt; de voetpunten zijn (9,0), (4,0) en (6,7); de spiegelbeelden van het hoogtepunt t.o.v. de zijden zijn (10,6), (0,6) en (4,9); zij liggen op de omgeschreven cirkel $(x - 5)^2 + (y - 9)^2 = 1$.

Duidelijk is nu, dat de gewone analytische meetkunde slechts één van de vele mogelijke stelsels is nl. het meetkundig stelsel behorend bij de reële getallen. Reeds lang geleden is men tot het gebruik van complexe getallen overgegaan. Maar tegen het gebruik van die andere getallenstelsels bestaat een soort tegenzin. Misschien een dergelijke tegenzin als tegen de Riemannse meetkunde heeft bestaan. Daarin heeft elke rechte slechts eindige lengte en is in zich zelf gesloten. Dat was „vreemd" en daardoor heeft het zoveel langer geduurd voordat de Riemannse meetkunde als gelijkwaardig tegenhanger van de Lobatschefkysche werd aanvaard. Zo iets vreemds is er ook in deze eindige meetkunden.

Laat hieraan dadelijk toegevoegd worden, dat het eigenlijk niet dat „eindige" is, waar het om gaat. We kunnen bv. aan de getallen 0, 1, ..., 10 (modulo 11) een getal a toevoegen. Dan moeten natuurlijk ook de getallen a^2, a^3, $\frac{1}{a}$, $a + 1$ enz. in de verzameling worden opgenomen. En om een stelsel te krijgen, waarmee *steeds* opgeteld, afgetrokken, vermenigvuldigd en gedeeld kan worden, moeten zelfs alle getallen van de vorm $\frac{c_0 + c_1 a + \ldots + c_m a^m}{d_0 + d_1 a + \ldots + d_n a^n}$ opgenomen worden. Dat zijn er oneindig vele en voor al die getallen geldt:

$g + g + 11 \times + g = g \,.\, (1 + 1 + 11 \times + 1) = g \,.\, 0 = 0.$

Blijkbaar behoort bij dit getallenstelsel een analytische meetkunde met oneindig veel punten, maar niettemin geldt voor elk segment: bij verder uitzetten van $10 \times$ de lengte keert men in het beginpunt terug. Aan deze eigenaardige „terugkeer" moet men even wennen. Het getal, dat het aantal schreden aangeeft (in het laatste voorbeeld, 11) heet de karakteristiek van het vlak. Het is mogelijk

met analytische middelen naar willekeur „vlakken" te construeren met elke gewenste karakteristiek (priemgetal).

Neem nu het meest excentrieke geval: de karakteristiek 2; dus modulo 2 rekenen met 0 en 1 ($1 + 1$ is dan 0); dit stelsel kan men door toevoeging van een getal a uitbreiden met alle getallen van de vorm $\frac{c_0 + c_1a + \ldots + c_ma^m}{d_0 + d_1a + \ldots + d_na^n}$ tot een oneindig getallenstelsel, waarin steeds geldt $g + g = 0$. Wat geldt dan in de bijbehorende meetkunde? Blijkbaar het volgende. Stel OABC en ADBC zijn twee aaneengehechte parallelogrammen; OA is dan door AD met de eigen lengte verlengd en D zal samenvallen met 0. D.w.z. BD is niets anders dan de diagonaal BO van het parallelogram OABC. We krijgen dus in deze meetkunde de stelling: de diagonalen van een parallelogram zijn evenwijdig. De consequenties van deze stelling zijn nog eigenaardiger: neem een gelijkbenige driehoek ABC (A top), trek de parallelen BD en CD, dan is ABDC een ruit. De diagonalen staan loodrecht op elkaar, maar — zijn tevens evenwijdig. Deze paradox moet als volgt opgelost worden: stellingen over loodlijnen blijven gewoon geldig, mits men telkens als er een loodlijn getrokken moet worden een evenwijdige lijn trekt.

Voorbeeld. Neem een driehoek ABC, trek de „loodlijn" uit A op BC, dus volgens het voorschrift: trek door A de parallel van BC; trek ook de parallel van CA door B, dan moet hun snijpunt D met het hoogtepunt overeenkomen en de parallel van AB door C moet ook door D gaan. Maar dat is ook zo, want we hebben juist de zoëven besproken figuur gekregen: een parallelogram ABCD met de diagonaal CD evenwijdig aan AB. In deze eigenaardige meetkunde geldt dus wel degelijk de stelling: de hoogtelijnen van een driehoek gaan door één punt.

Wat wordt er van de stelling van Pythagoras?

Neem een zijde AB; zet in het hoekpunt B een zijde BC loodrecht daarop; loodrecht d.w.z. in dezelfde richting; dus BC komt met AB in één lijn. Nu geldt $AB^2 + BC^2 = AC^2$; immers $(AB + BC)^2 = AC^2$, dus $AB^2 + AB \cdot BC + AB \cdot BC + BC^2 = AC^2$. Maar $AB \cdot BC + AB \cdot BC$ mag volgens de regel $g + g = 0$ geschrapt worden; dus $AB^2 + BC^2 = AC^2$.

De stelling van Pythagoras geldt dus, maar triviaal. De vraag rijst: wat heeft men aan deze buitenissigheden?

Om de betekenis daarvan duidelijk te maken knoop ik aan bij bekende dingen uit de grondslagen van de meetkunde.

Klein heeft gewezen op het belang van transformaties voor de

meetkunde. Hoe is een figuur te transformeren? Bv. door vergroting, maar ook bv. door eenzijdige samendrukking (affiniteit). Hoe worden de eigenschappen van een figuur daardoor beinvloed? Ik denk nu even uitsluitend aan de gewone reële meetkunde.

Neem bv. een driehoek met de drie hoogtelijnen. Bij vergroting blijven dit hoogtelijnen; maar bij affiene vervorming blijkt, dat de verkregen rechten geen hoogtelijnen van de verkregen driehoek meer zijn. Neem zwaartelijnen, dan vindt men bij beide transformaties wederom zwaartelijnen. De vergroting is een minder ingrijpende transformatie dan de eenzijdige samendrukking. De figuur met de hoogtelijnen verdraagt alleen de eerste transformatie; de figuur met de zwaartelijnen blijft bij beide transformaties een driehoek met zwaartelijnen.

Men kan aldus meetkundige eigenschappen klassificeren: metrische eigenschappen zijn subtieler, verdragen geen eenzijdige samendrukking van de figuur; affiene eigenschappen daarentegen wel. Dit heeft consequenties voor de hulpmiddelen, die bij een bewijs gebruikt worden. Om een voorbeeld te geven: het is gewoonte om bij het bewijs van de stelling van Menelaus loodlijnen uit de hoekpunten A, B en C neer te laten op de transversaal *t*. Men gebruikt dan metrische hulpmiddelen (loodlijnen) voor het bewijs van een affiene stelling dus a.h.w. niet voldoende verreikende hulpmiddelen. Inderdaad bestaat de mogelijkheid van een figuur, waarin de stelling van Menelaus geldt, maar het bewijs met de loodlijnen onmogelijk wordt; nl. als transversaal *t* isotroop is. Wie let op dit onderscheid metrisch — affien, zal geen loodlijnen gaan trekken, maar eenvoudig drie parallelen door A, B en C die *t* snijden. Dan wordt het bewijs algemeen geldig.

K l e i n's Erlanger program leidt dus tot een zekere „bewijscritiek". Zoekt men een bewijs, dan zal deze critische bezinning voor dwaalwegen behoeden. Neem bv. een vrijwel onbekende stelling: (Möbius) voor 5 willekeurige punten van een vlak geldt: ABD . CDE + BCD . ADE + CAD . BDE = 0. Dit is een affiene stelling (het oppervlak is een affien begrip). Dus moeten voor het bewijs metrische hulpmiddelen vermeden worden; m.a.w. trek geen loodlijnen.

Tot dergelijke voorschriften komt men vanuit de abstracte meetkunde. Beschouw de stelling over isogonale lijnen in een driehoek ABC: als de lijnen naar P en Q vanuit A en B isogonaal zijn, dan zijn ook de lijnen vanuit C isogonaal.

Volgens K l e i n's program is er generlei bezwaar om uit de punten P en Q de loodlijnen (PP_a enz.) op de zijden neer te laten.

Immers de stelling is metrisch en metrische hulpmiddelen zijn dus geoorloofd. Het gebruikelijke bewijs gaat dan ook als volgt: uit de gelijkheid der hoeken bij A en B volgt

$$\frac{PP_b}{PP_c}=\frac{QQ_c}{QQ_b} \text{ resp. } \frac{PP_c}{PP_a}=\frac{QQ_a}{QQ_c} \text{ dus } \frac{PP_a}{PP_b}=\frac{QQ_b}{QQ_a}.$$

Dus zijn ook de hoeken bij C gelijk.

Maar de abstracte meetkunde geeft nu het voorschrift: gebruik die voetpunten niet. Immers de figuur bestaat in een analytisch vlak waarin $g + g = 0$ evengoed als in de gewone meetkunde. Wil men een bewijs geven, dat ook in zo'n vlak geldig blijft, dan mag geen gebruik gemaakt worden van de voetpunten (immers in zo'n vlak zijn loodlijnen evenwijdig; zie boven). Door de abstracte meetkunde worden dus aan K l e i n's eisen andere toegevoegd.

Dit dwingt tot het zoeken van andere bewijzen. Zo komt men bij de isogonalen tot het volgende algemeen geldige bewijs: laat A′, B′ en C′ de spiegelpunten zijn van P t.o.v. de zijden. Dan ligt Q op gelijke afstand van B′ en C′ resp. van C′ en A′. Dus volgt uit de symmetrie, dat P en Q ook op isogonalen vanuit C liggen.

Juist deze dwang tot het geven van algemene bewijzen kan tot nieuwe gezichtspunten leiden. Het laatste bewijs gebruikt slechts de eenvoudigste cirkeleigenschappen en leidt bij verder onderzoek tot een nieuwe oplossing van het probleem van Malfatti [1]).

Een ander onderwerp, waarop de abstracte meetkunde licht werpt. Het valt op, dat bij formules, waarin een afstand tot het zwaartepunt van een driehoek optreedt, telkens het getal $^1/_3$ te pas komt. Men zoeke hierin echter geen getallenmystiek. Een en ander wordt duidelijk bij beschouwing van een analytisch vlak, waarin voor elk getal geldt $g + g + g = 0$ (karakteristiek 3).

Neem daarin een driehoek ABC, dan gaan de zwaartelijnen uit A en B door de diametrale punten A′ en B′. Neem nu op de rechte A′B′ het punt A″ zó, dat A′C = CB′ = B′A″. Dan is AA″ // BB′. Maar wegens $g + g + g = 0$ valt A″ met A′ samen; dus AA′ // BB′. De zwaartelijnen zijn dus evenwijdig. M.a.w. in een analytische meetkunde met $g + g + g = 0$ ligt het zwaartepunt van elke driehoek oneindig ver weg. In de formules komt dit uit doordat „$^1/_3$" bij modulo 3 rekenen niet bestaat („∞" is).

Nu onderscheiden gelijkzijdige driehoeken zich door de eigenaardigheid, dat het hoogtepunt (dat altijd in het eindige ligt) tevens zwaartepunt is. Gelijkzijdige driehoeken kunnen dus niet voorkomen

1) Zie hiervoor en voor al het hier behandelde, mijn werkje Moderne Vlakke Meetkunde, Thieme '41.

in een vlak, waarin $g + g + g = 0$. Stellingen over gelijkzijdige driehoeken gelden alleen als $g + g + g \neq 0$ m.a.w. alleen in vlakken, waarin elke driehoek een zwaartepunt in het eindige heeft. Men kan dus bij zulke stellingen verwachten, dat er verband met het driehoekszwaartepunt bestaat.

Inderdaad zijn hiervan voorbeelden te geven: de centra van de gelijkzijdige driehoeken uitgezet op de zijden van een driehoek ABC vormen een gelijkzijdige driehoek met het zwaartepunt van $\triangle$ ABC als centrum. Ook is bv. bij de stelling van Morley over de trisectricen van een driehoek een verband te verwachten met het zwaartepunt; en het blijkt inderdaad te bestaan.

Uit deze voorbeelden blijkt, dat de abstracte meetkunde heuristische waarde kan hebben.

Om met iets fundamenteels te besluiten: bij vele eigenschappen speelt het begrip „tussen" een rol. Dit correspondeert met het algebraïsche groter en kleiner. Bij de getallen 0, 1, ..., $p - 1$ modulo p is het invoeren van dit begrip niet mogelijk; de bijbehorende meetkunden missen dan ook de ordening. Dit is juist het bovenbesproken „vreemde" van deze meetkunden.

Nu is duidelijk, dat typisch reële kwesties, zoals bv. $\frac{\text{omtrek cirkel}}{\text{middellijn}} = \pi$ niet in de modulo p meetkunden aangeroerd kunnen worden. Maar het is apriori mogelijk, dat er bij de bepalingen van begrippen gebruikgemaakt wordt van de ordening zonder dat dit strikt noodzakelijk is. Dit gebeurt inderdaad bij de zg. halfrechten en de daarop gebaseerde hoekmeting. Het is heel goed mogelijk het begrip halfrechte te definieren zonder gebruik te maken van de ordening. Tevens blijkt het dan mogelijk tot een uitbreiding van die begripsvormen over te gaan; tot „derderechten", „vierderechten" enz. Het zou te ver voeren hierop nader in te gaan. Voldoende is er op te wijzen, dat de abstracte meetkunde ook tot begripszuivering leidt.

Samenvattend: de abstracte meetkunde blijkt van betekenis bij de bewijscritiek, voor de heuristiek en voor de begripszuivering. Stellig drie punten van belang voor de schoolmeetkunde. Maar op de vraag: „is het gewenst bij de schoolmeetkunde rekening te houden met de abstracte meetkunde?" moet wel een ontkennend antwoord volgen.

Men heeft hier te doen met een geheel andere opzet van de meetkunde. Bovendien is niet alles zo eenvoudig als ik het — enigszins tendentieus — heb voorgesteld. Om maar enkele moeilijkheden te

noemen: bij het modulo 13 rekenen treft men in het vlak isotrope rechten aan bv. $y = 5x$ en $y = 8x$ (immers $5^2 = 8^2 = -1$ mod 13; dus 5 en 8 vervullen de rol van $\pm\, i$); verder vindt men cirkels zonder punt en bij een modulo 2 meetkunde is zelfs het rechthoekig assenkruis een onmogelijkheid, zodat men daar niet met de gewone analytische formules kan werken, maar scheefhoekige moet gebruiken. Kortom: het staat wel vast, dat deze abstracte meetkunde buiten het bereik der leerlingen ligt.

Maar iets anders is dit voor den leraar. Nu wil ik niet de practische betekenis van de abstracte meetkunde overdrijven, al kan men ermede tot gelukkige vondsten, bewijzen enz. komen. Maar stellig van belang is, dat de leraar een besef heeft van het betrekkelijke karakter van de gewone meetkunde, dus van het feit, dat zij past in een veel ruimer kader. Een ruime blik komt allicht het onderwijs tengoede. En zou het onmogelijk zijn een bizonder goeden leerling enig idee mee te geven?

IS WISKUNDE ONDERWIJS VOOR α's NOODZAKELIJK?

door

Dr G. WIELENGA [1]).

De α's zijn altijd mijn zorgenkinderen geweest. Als zodanig natuurlijk mijn liefste kinderen; kinderen, die je het meest na aan het hart liggen, omdat je er het meest mee omtobt — maar toch zorgenkinderen, zodat ik dikwijls tot de verzuchting kwam: „och waartoe dit alles?" Het wiskunde-onderwijs aan de β's kent dit probleem van het „waarom toch" niet. Natuurlijk moeten deze lieden wiskunde leren — al was het maar als noodzakelijke basis voor hun verdere studie. Zij kunnen over het algemeen het wiskunde-onderwijs ook verwerken en de toegediende dosis mathematiek — ofschoon in bescheiden mate — assimileren; het doet ze wat en ze worden er dus — min of meer — door gevormd.

Maar de α's!? Is het niet zo, dat slechts een klein percentage — in elk geval een te klein percentage — het onderwijs verwerkt? En wat is de vormende waarde voor de velen, die het niet verwerken? Het is nuttig, naar men zegt, te worstelen met moeilijke stof. Inderdaad, halteren ontwikkelt de spieren en veel nuttigheid zal men er niet van hebben als deze een ons wegen — maar wat nuttigheid heeft het halteren met gewichten van 100 kg? Immers geen! Wat is dus de vormende waarde van leerstof, die ver boven het bevattingsvermogen van de leerlingen gelegen is?

Het vreemde is, dat ik er in mijn hart van overtuigd ben — en blijf — dat de aan de α's op dit moment gestelde eisen zeker niet overdreven zwaar genoemd kunnen worden en dat de gemiddelde α deze stof behoorlijk aan kan. Desalniettemin blijft het feit bestaan, dat een belangrijk percentage dezer leerlingen zich deze stof klaarblijkelijk niet voldoende eigen kan maken. En wat voor zin heeft het hen te dwingen een hoeveelheid onverteerbare — of althans onverteerde — stof optenemen, met als enig doel (voor de leerling nl.), die op het eindexamen te lozen (dwz. kwijt te raken)?

Ik heb opzettelijk — vanwege het aanloopje — de zaak enigszins overdreven voorgesteld, maar het zou mij toch verbazen, indien geen

---

1) Voordracht gehouden vanwege het Mathematisch Centrum op Donderdag 31 Oct. 1946.

uwer, zo gij ook met dit slag lieden te maken hebt, ooit de twijfel heeft beslopen van het „waarom toch”?

Nu kan men de zaak wel afsnijden met de exclamatie: „maar gelooft U dan niet in uw vak?!” Dan zit de twijfelaar natuurlijk hopeloos vast, want hij kan niet met goed fatsoen „neen” zeggen! Maar zo eenvoudig ligt de zaak toch niet. Een beroep op de definitie van het geloof uit de Hebreeër brief: „Het geloof is een vaste grond der dingen, die men hoopt en een bewijs der zaken, die men niet ziet” — gaat toch niet op! Deze religieuze overtuiging, dit geloof, dat bergen verzetten kan, ligt in een geheel ander vlak, is in laatste instantie niet op mijn rede gebaseerd, omdat het in de grond der zaak een gave Gods is. Mijn geloof in de vruchtdragende werking van het wiskunde-onderwijs is van een totaal ander karakter. Het is geen heiligschennis eraan te twijfelen en eens te onderzoeken of het soms ook bijgeloof zou kunnen zijn. Dit „credo” moet wel degelijk redelijk gefundeerd worden en het is nodig dit telkens weer te proberen.

De eerste vraag, die ons dus zal bezig houden is: wat willen wij eigenlijk met ons wiskunde-onderwijs bereiken, welke zegeningen willen wij er mee verspreiden, in welk opzicht moet het onze leerlingen — en dan speciaal de α's — vormen? In het bijzonder moeten wij onderzoeken of het ook zulke onmisbare waarden schenkt, en *alleen* schenken kan, dat het in elk voorbereidend universitair onderwijs een onontbeerlijk element moet worden genoemd.

En vervolgens moet overwogen worden — indien het antwoord op het voorgaande tenminste niet negatief uitvalt — vanwaar de onbevredigende resultaten dan komen? Zijn er in de aard van het vak zelve factoren gelegen, die het toch eigenlijk voor een groot aantal leerlingen ongeschikt maken als leerstof, zodat wij er noodgedwongen maar van moeten afzien? Of ligt de oorzaak in een verkeerde methode en waarom en waarin faalt dan de gemeenlijk gevolgde weg?

We mogen niet verwachten, dat wij tot een oplossing van al de genoemde problemen zullen geraken. Hun complexe aard — vooral de daar mee samenhangende psychologische kwesties — maakt een zuiver deductieve aanpak onmogelijk, zodat wij in elk geval niet met wiskundige zekerheid een eindconclusie zullen kunnen trekken. De zaak zal veel meer van een practische, ik zou haast zeggen van een experimentele kant benaderd moeten worden. Theoretisch lijkt het dikwijls eenvoudig, theoretische wijsheden zijn gemakkelijk te poneren (ik ben mij bewust, welk een gevaarlijke uitspraak dit is in

verband met het volgende) — maar zijn de aanbevelingen uitvoerbaar in een klas van ruim 30 leerlingen, blakend van levenslust, de hoofden en harten vervuld met allerhande zaken, die ver van de abstracte mathesis gelegen zijn ..... enfin gaat U zelf maar door. Daarom is de oprichting van een didactisch centrum zo uiterst belangrijk.

Niet dat er tot nu toe niets geschied is. Dit te zeggen zou zeer onbillijk zijn tegenover de vele medewerkers aan het tijdschrift „Euclides", want wat zij gedaan hebben voor de didaktiek der wiskunde is moeilijk te overschatten. Vooral de betekenis van de figuur van Dijksterhuis is in dit opzicht zeer groot. Zijn idealistische uiteenzettingen hebben vele wiskunde-docenten weer geloof geschonken in de waarde van hun vak en geprikkeld tot verbetering en vernieuwing van hun onderwijs. Maar het laatste woord is daarover toch niet gezegd — men kan ook te theoretisch idealistisch zijn!

Dijksterhuis spreekt dikwijls in het bijzonder over de waarde van het wiskunde-onderwijs voor degenen, die later niet in één der β-faculteiten verder studeren. Dit is ook voor hem een der belangrijkste vragen: waarom moet aan de wiskunde in alle middelbaar onderwijs zulk een grote plaats ingeruimd worden? In een zijner oraties laat hij een ganse reeks argumenten pro en contra de revue passeren en hij komt dan — natuurlijk — tot de conclusie, dat het niet mogelijk is de waarde van een leervak op wetenschappelijke wijze vast te stellen. Tenminste *nu* nog niet — voor een deductieve redenering leent het probleem zich niet en voor een inductief bewijs is niet voldoende feitenmateriaal aanwezig. Vandaar dat slechts een „credo" mogelijk is.

Hij legt, zonder haar materiële waarde, als hulpwetenschap, te willen ontkennen, in volle zwaarte steeds weer het accent op de formele waarde van de wiskunde — dwz. op de scholing van het wetenschappelijk denken, de ontwikkeling van het vermogen tot logisch redeneren, waarvoor zij zo bij uitstek geschikt is, doordat haar objecten zo eenvoudig en scherp omlijnd zijn. In het bijzonder legt hij de nadruk op de invloed door het wiskunde-onderwijs ten goede uitgeoefend op exact woordgebruik, een heldere uitdrukkingswijze en het gevoel voor verantwoordelijkheid voor uitgesproken beweringen. Deze en dergelijke zaken strijden tegen de gewoonten en neigingen van de normale leerling, maar juist de hierin van hem gevergde inspanning is van grote morele betekenis. Dit noemt hij het „epistemisch beginsel", dat saam te vatten is in de verplichting van de leerling, om zich voortdurend de beide heilzame vragen te stellen: „Wat versta ik er onder? Hoe kom ik er

aan?" Doch het antwoord moet ook duidelijk in woorden worden uitgedrukt. „Want", zegt hij, „men kan iets niet helder denken, zonder het zuiver te zeggen en dat beginsel willen zij (dat zijn de epistemici) in het wiskunde-onderwijs in de allereerste plaats in practijk brengen." Daarom is goed wiskunde-onderwijs — vooral voor *α*'s — vóór alles taalonderwijs. De inhoud der mathematische leerstof is alleen maar het materiaal, waaraan het vermogen om zich goed uit te drukken ontwikkeld wordt. En dan is wiskunde eigenlijk het enige vak, waarin men zich van alles wat men zegt en doet rekenschap kan geven, „omdat zij het enige vak is, dat zich de weelde kan veroorloven, te abstraheren van iedere complicatie, die haar zou kunnen verstoren."

Er zijn natuurlijk nog veel meer weldaden, die het goede wiskunde-onderwijs kan schenken. Als daar zijn: begrip voor de eis, een stelling slechts daar toe te passen, waar haar praemissen vervuld zijn; een critische houding tegenover de intuitief geziene oplossing van een probleem; het invoegen van het gevondene in een geordend systeem; het leren overzien van een enigszins ingewikkelde logische structuur; de correcte toepassing van een rekenregel en de oefening der ruimte-aanschouwing, om er maar enige te noemen. Velen wijzen er ook op, dat de wiskunde zich bijzonder leent tot zelfstandige werkzaamheid der leerlingen.

De bewijsvoering is niet overal even overtuigend—daarvan is ieder overtuigd. Trouwens het probleem is niet vatbaar voor een afdoend bewijs. B.v. ook B o t t e m a wijst daarop, als hij zegt [1]), dat het niet een wiskundig, maar een psychologisch en maatschappelijk probleem is, waardoor het antwoord alle onzekerheid en onnauwkeurigheid heeft, die de antwoorden op dergelijke vragen plegen te hebben.

Niet alleen kinderpsychologische vraagstukken spelen hier een rol, als b.v. de structuur van het kinderlijk denken en zijn opvoedbaarheid, maar vooral ook de kwestie van de persoonlijkheid van de docent, die van het allergrootste belang is bij elke beïnvloeding van de jeugd. Men moet bij deze en dergelijke beschouwingen welhaast uitgaan van een „ideaal docent", wat dat dan ook voor een onmens moge zijn! Dit heeft inderdaad een voordeel — nl. dat men onvoldoende resultaten in de practijk altijd kan wegredeneren, door ze op rekening van de falende leraar te boeken!

In elk geval staat vast, dat verreweg de meeste voorstanders van het wiskunde-onderwijs de nadruk op zijn vormende waarde leggen. En zij spreken hiermede impliciet hun overtuiging uit, dat overdracht

---

[1]) „De dienst der Wiskunde." Inaugurele Oratie. 1941.

van goede denkvormen aan wiskunde-materiaal onderwezen op andere terreinen mogelijk is. Een dertigtal jaren geleden stond men over 't algemeen vrij sceptisch tegenover de mogelijkheid der transfer, doordat men al te goedgelovig al te stellig geponeerde Amerikaanse theoriën overnam, doch later kwam daarin verandering, zodat men nu in onderwijskringen vrijwel algemeen van opinie is, dat men in dit opzicht gerust kan zijn en niet op drijfzand bouwt. Deze overtuiging is voornamelijk gebaseerd op intuïtieve gevoelens en de overlevering — misschien mag ik zeggen: de ervaring — van eeuwen.

Deze kwestie is voor het wiskunde-onderwijs van primordiaal belang, aangezien de leerstof wel extra ver van het leven van allen dag verwijderd staat. Wat heeft Ds X immers nog aan zijn vroegere handigheid in het aanvullen tot een zuiver vierkant en Mr. Y aan de theorie van het verduisteren van wortels? En wat moet Mevr. Z met de moeizaam ingeprente formules van de afgeknotte kegel?

Inderdaad het onderwijs in de wiskunde staat of valt — in veel sterkere mate nog dan dat in de andere vakken — met het al of niet bestaan van zijn vormende waarde.

Wat bedoelen wij daarmee — wat willen, wat moeten wij vormen?

In de eerste plaats zij er op gewezen, dat het hier natuurlijk niet kan gaan om het verstandelijke alleen, maar om het totale wezen van de ons toevertrouwde jeugd, laten wij zeggen om zijn persoonlijkheid. Deze visie op het totaal mogen wij nooit vergeten, zij moet ons voor eenzijdigheid bewaren en waakzaam doen zijn voor gevaarlijke nevenverschijnselen, die onbedoeld de mentale training begeleiden. Een mens is nu eenmaal zo, dat wij hem lichamelijk, noch geestelijk in stukjes kunnen knippen. Het kind reageert in zijn totaal op zijn leraar en op de leerstof. Wij kunnen niet uitsluitend zijn verstand vormen, maar beïnvloeden vanzelf daarin en daarnaast de groei en de ontplooiing van zijn persoonlijkheid — ten goede of ten kwade, positief of negatief, maar in elk geval niet neutraal.

Dat neemt niet weg, dat niet in elk uur, bij elk vak en door elke leraar even sterke invloed in deze zin wordt uitgeoefend. Op de middelbare school valt uiteraard het accent op de verstandelijke ontwikkeling en in de wiskunde-les is dit weer in bijzondere mate het geval. Dit is niet minderwaardig, want een zuiverder structurering en eèn zakelijker functioneren van het verstandsleven zal ook het wils- en gevoelsleven tot meerdere zuiverheid kunnen brengen. Een onontwarbaar vervlochten zijn van deze drie is eerder een nadeel dan een voordeel. Waarmee ik natuurlijk niet zeggen wil, dat „de grote zedelijke eigenschappen van verdraagzaamheid, ge-

reserveerdheid en voorzichtigheid in het oordeel alleen door kennis kunnen worden bijgebracht" — zoals Cuypers in zijn „Het aankweken van het wiskundig denken" beweert. Neen, dan ziet Pascal dieper als hij er op wijst, dat God juist omtrent Zijn fundamentele waarheden gewild heeft, dat zij door ons hart in ons verstand opkomen en niet door ons verstand in ons hart.

Maar dit is slechts een „terzijde". Ik bedoelde zoëven slechts een verdediging tegen de verwoede vijanden van het intellectualisme — u kent ze wel. Want de wiskunde is wel extra-intellectualistisch. Immers wiskunde speciaal leert denken, hoort men telkens weer.

Wat voor denken? Logisch denken, wiskundig denken, wiskunde denken, exact denken? Wat bedoelt men toch eigenlijk met die termen? Van Dantzig heeft reeds vele jaren geleden er de aandacht op gevestigd, dat bij de discussies hierover een groot gebrek aan mathematische scherpte valt te constateren. Wat men gewoonlijk onder dat begerenswaardige „logische denken" verstaat, is volgens hem, „signifische bezinning", dwz. taaldifferentiatie, woordcritiek en problematiek. Inderdaad iets van hoge waarde; doch het zou een fictie zijn, dat dit door het huidige wiskunde-onderwijs zou worden aangekweekt.

Hoe dit zij — met de uitdrukking „logisch denken" mag men zeker wel voorzichtig zijn. In zeer ruime zin genomen betekent het: orde stichten in de menigte onzer voorstellingen. Het tracht relaties tussen objecten in een oordeel te fixeren en zulke oordelen te verbinden tot conclusies. Het zief daarbij in de grond nog af van het juist of niet-juist zijn der conclusie — logisch betekent dan alleen maar „geordend". Het staat enerzijds tegenover het zuiver associatief voortschrijden der voorstellingen in ons bewustzijn, anderzijds tegenover het logisch denken in zeer enge zin.

Dit laatste zoekt betrekkingen, die noodzakelijkerwijze uit éénduidige vooronderstellingen volgen; terwijl de waarheid van deze vooronderstellingen of evident of reeds „bewezen" is. Logisch betekent hier „geldig". Het is de logica der mathesis en der formele logica. Zulke kunstmatig vereenvoudigde situaties ontmoeten wij echter niet buiten hun terrein; daarom kan dit logisch denken niet het doel van ons onderwijs zijn en we bedoelen het dan ook niet, als we spreken over de „mental training", die het wiskunde-onderwijs, het onderwijs in de klassieke talen, e.a. aan de scholier wil schenken.

Het denken, dat wij bedoelen, kunnen wij misschien beter omschrijven door systematisch denken; het is methodisch geordend, voorzichtig en vooral zelf-critisch.

Het gaat uit van een probleem-situatie en begint met een zorgvuldige analyse en begrenzing daarvan — d.w.z. met het verhelderen en onderscheiden van de betreffende waarnemingen, voorstellingen en begrippen en het uitzoeken en uitkiezen der wezenlijke factoren in een gegeven situatie, kortom met de analyse der gegevens.

Dan stijgen er, min of meer van zelf, vermoedens in ons bewustzijn op, oplossingsmogelijkheden. Dit is in de eerste plaats een kwestie van aanleg, fantasie, scherpzinnigheid. Maar ook systematisch zoeken in reeds verworven kennis of reeds succesvol gebleken oplossingsmethoden kan deze vermoedens vermenigvuldigen of hun ontstaan bevorderen.

Nu komt het eigenlijke redeneren, nl. het grondig toetsen en doordenken in alle consequenties van de oplossingsmogelijkheden. De luie en trage accepteert verheugd de eerste de beste inval, maar de wetenschappelijke denker laat ze stuk voor stuk de revue passeren, schift degene er uit, die tot onhoudbare consequenties leiden en „behoudt het goede". Dit onderzoek kan weer leiden tot nadere observatie en analyse der gegevens, want deze denktrappen, zoals Dewey ze noemde, zijn natuurlijk niet scherp gescheiden en in den tijd elkaar opvolgende fasen, doch dienen slechts ter analyse van ons denkproces.

Tenslotte de fase, waarin de meest waarschijnlijke hypothese geverifieerd wordt: door het physische experiment, door de geometrische constructie of door het plaatsen in tekst- of historisch verband of wat dan ook. Want zelfs de grootste zorgvuldigheid in het redeneren sluit vergissingen niet uit.

Inderdaad dit is wetenschappelijk denken, dat niet alleen in elke pure wetenschap, maar ook in het maatschappelijk leven van het grootste belang is. Het is eigenlijk niet zozeer een bepaalde psychische functie, of een complex van intellectuele functies of een denkmethode, als wel een denkgewoonte, een geesteshouding, een habitus. Het accent valt op de vierde fase — het doordenken der consequenties. Dit zakelijk critisch beschouwen van allerlei vermoedens, vooral van onze eigen invallen, gevolgd door de uiteindelijke toetsing van het resultaat, deze denktucht is van bijzonder grote waarde.

Kan men dit aanleren? Inderdaad, ik geloof veel eerder aan het vormen van dergelijke „gewoonten", dan aan het oefenen van bepaalde functies. Psychische functies ontplooien en ontwikkelen zich voor een belangrijk gedeelte vanzelf. Wij moeten ze natuurlijk voeden, hen de groeimogelijkheden niet onthouden, door ze te laten verhongeren, maar het zal wel een strijdpunt blijven wat primair

is in deze ontplooiing: de invloed van de opvoeding of diè van de natuurlijke groei. En ik voor mij ben geneigd de laatste het belangrijkste te achten. Ik noem in dit verband slechts het verschijnsel der „gevoelige perioden", maar wil er verder niet op ingaan, omdat het op dit moment een zijspoor is. Gewoonten groeien echter niet vanzelf, die worden gevormd; ook denkgewoonten, ofschoon aanlegfactoren hier natuurlijk ook een belangrijke rol zullen spelen!

Bovendien spreekt het bij lange na niet vanzelf, dat b.v. denkgewoonten op wetenschappelijk gebied verworven ook zondermeer op ander gebied worden gevolgd. Zijn professoren ipso facto de beste politici?! Wel doet het feit, dat in zovele utopiën de leiding van de staat aan de wetenschapsmensen wordt toegedacht, zien, dat men aanvoelt, dat deze wetenschappelijke, zakelijke instelling ook voor het maatschappelijk leven van eminent belang is. Wil de gewoonte echter uitstralen over, zijn werkingssfeer uitbreiden tot ander terrein, dan het oorspronkelijke of de naastliggende, dan kan een dergelijke transfer zeker niet zonder opzet geschieden. De bewustheid van hetgeen overgedragen moet worden, dient bij den docent en ook bij de oudere pupil aanwezig te zijn, anders worden het mechanische gewoonten zonder kracht.

Goede denkgewoonten zijn van het grootste belang, want in elk geval wordt de een of andere gewoonte gevormd. Als er geen gewoonten van zorgvuldigheid, geordende aanpak, grondige toetsing en taaie vasthoudendheid ontstaan, dan worden voorbarigheid, oppervlakkigheid, raden, lichtgelovigheid en lichtvaardige ongelovigheid tot gewoonte!

Ik wil speciaal nog de aandacht vestigen op het kenmerk der vasthoudendheid, ook in een langere denkacte. Dit is een der voornaamste zegeningen van het systematisch geschoolde denken. Het kinderlijke „babbelen", het afzwerven van een thema, het praten en denken, dat als los zand aan elkaar hangt, zijn niet alleen fouten van kinderen en seniele grijsaards. Dat men het verstandelijk functioneren nimmer in de psychische activiteit isoleren kan, blijkt in dit verband nog eens ten duidelijkste. Immers een vaste wil tot het bereiken van een oplossing, een diep grijpende interesse in het probleem, is voor deze continuïteit zó al niet een voldoende, dan toch zeker een noodzakelijke voorwaarde. Vervolgens dienen wij er op te letten, dat een zodanig denken als hier wordt beschreven niet een napraten, doch slechts een zelfstandig gevoerde actie kan zijn!

Kan het wiskunde-onderwijs medewerken aan het vormen van deze denktucht, is het misschien speciaal geschikt daarvoor of zelfs:

is de wiskunde het enige vak, dat deze zegeningen in volle omvang schenken kan? Dit zijn de vragen, die voor ons van belang zijn!

De eerste vraag kunnen wij volmondig bevestigend, de laatste even volmondig ontkennend beantwoorden. Wat de eerste aangaat, de rol, die het wiskunde-onderwijs bij deze mentale training kan spelen, zullen we verderop nog bezien. Wat de laatste betreft, de gedachte aan de denkscholing gelegen in her vertalen van moeilijk Latijn, het maken van een opstel („met een draad"), enz. moet voor ons voldoende zijn om niet te exclusief de mathesis te verheerlijken. Het lijkt me niet nodig deze antwoorden nog verder uitvoerig te adstrueren.

Maar de tweede vraag: is de wiskunde speciaal geschikt voor deze geestelijke vorming?

Pascal spreekt van tweeërlei geest: l'esprit de géometrie en l'esprit de finesse. De eerste heeft een langzame, harde, onbuigzame gedachtengang en mist de soepelheid, die de geesten van het fijne levensinzicht eigen is. Het wikken en wegen der argumenten, het waarderen, het afwegen der gegevens tegenover elkaar, dat het wiskundig betoog niet kent, is echter toch van enorm belang, niet alleen in kunst en leven, maar ook in wetenschappelijk onderzoek op het gebied van psychologie, recht, theologie en wijsbegeerte. Zegt Mannoury ook niet ergens: „de aangeleerde wiskunde zal in het leven naar de betekenis der geuite beweringen leren vragen, maar daarbij gaat de bedoeling juist verloren," en hij concludeert „wiskunde leert wiskunst en geen redelijkheid." Dit is niet een denigrerend spreken over het vak, waarin wij geloven, maar een vaststellen der grenzen, een objectief bezien van wat het ons wel en wat het ons niet geven kan. En een zeer belangrijk gebied van het menselijk denken bestrijkt het niet!

Het antwoord op de tweede vraag is dus zelfs al dubieus! Doch er komt nog meer. De wiskunde dankt haar strengheid, haar in bepaalde opzichten volmaakte vorm aan het abstraheren van iedere complicatie. Dat is haar kracht — doch tevens haar zwakheid.

Als Bottema poneert, dat men bij elk zelfstandig denken en handelen bewust of onbewust gebruik maakt van begrippen en denkwijzen, die in zuiverder en meer elementaire vorm de kern van een wiskundig betoog uitmaken en daaruit besluit, dat dus voor het zich eigen maken van de noodzakelijke verstandelijke discipline buiten de sfeer, waar zij tenslotte wordt geëist (aangenomen dat dit mogelijk is), allereerst aan wiskunde-onderwijs gedacht moet worden — dan is dus in de eerste plaats de praemisse een halve waarheid! Maar de conclusie steunt tevens op een dubieuze stelling

nl.: men leert redeneren het beste aan zo abstract mogelijke stof! Kohnstamm noemt deze opvatting op denkpsychologische gronden onhoudbaar.

Ik wil toegeven: wil men de jeugd bewust, correct, systematisch ofte wel wetenschappelijk denken leren, dan zal men in de eerste plaats aan onderwijs in de wiskunde denken. Het is echter zeer de vraag of men *bij nader inzien* de vormende waarde van dit onderwijs in dit opzicht wel zo hoog mag aanslaan.

Zeer behartenswaardige opmerkingen maakt Kohnstamm[1]) daarover.

In de wiskunde is het abstracte element zo sterk op de voorgrond getreden, zegt hij, dat haar begrippen ternauwernood voor het kind leven kunnen. Een mens — en vooral een kind — functioneert nu eenmaal niet alleen intellectueel. Om het denken in beweging te brengen en te houden moet het door impulsen vanuit de emotionele sfeer gestimuleerd worden.

Inderdaad, daarom blijven er grote bezwaren — ook nog tegen het in epistemische zin hervormde wiskunde-onderwijs, zoals Dijksterhuis dat aan de α's wil geven. De door hem genoemde en aangeprezen leerstof kan misschien door de doorsnee leerling begrepen en gereproduceerd worden, ofschoon Bottema het „rechtuit onmogelijk" acht. Maar het is te abstract om voldoende tot zelfstandig denken te stimuleren. Als men ziet, hoe de gemiddelde α in het reproduceren van een logische redenering — b.v. een bewijsvoering uit het begin der Stereometrie — extra gehandicapt wordt door het materiaal waarmee hij moet goochelen, dan komt de vraag toch wel eens bij je op: is er geen leerstof, die voor de scholing van het streng redeneren en ook van het exact woordgebruik geschikter is dan de wiskunde?

Men heeft in dit verband wel eens het schaken, het bridgen en zelfs de lectuur van detectiveromans aangeprezen. En dit is nog niet eens zo gek! In de oplossing van een goed in elkaar gezet moordprobleem, zoals b.v. Ellery Queen ze ons soms kan voorleggen, zit zeker een oefening in het nauwkeurig lezen en schiften en combineren van gegevens! Aangezien een leervak echter niet alleen een formele waarde moet bezitten, maar ook een functie moet vervullen in de cultuuroverdracht van geslacht op geslacht, moeten dergelijke voorstellen natuurlijk niet al te serieus worden genomen. Maar het taalonderwijs — speciaal dat in de Oude Talen en het Nederlands — kan, mits niet te literair-aesthetisch georiënteerd, m.i.

[1]) „De verhouding der anorganische natuurwetenschappen onderling en tot de wiskunde". Congres 1938.

zeker even goed tot de scholing van het denken en het exact woordgebruik, het aankweken van een heldere uitdrukkingswijze, enz. dienen als de wiskunde. Zo niet beter, aangezien het leerstof biedt, die wegens haar minder abstract karakter het denken meer activeren kan.

Doch vooral dringt zich, volgens Kohnstamm, ter vervanging van de wiskunde een andere wetenschap aan ons op, nl. de Natuurwetenschap. Z.i. is haar grote betekenis voor het leren denken hierin gelegen, „dat zij een welhaast onmisbaar tussengebied vormt tussen het voor de meerderheids-mens al te abstracte stofgebied der zuivere Wiskunde en het al te gecompliceerde en emotionele gebied van het volle leven en zijn waarden, mits men dan ook dat gebied der Natuurwetenschappen niet als een gebied beschouwt en behandelt van zuivere empirie, maar het leert bewerken met aan de wiskunde ontleende hulpmiddelen van het denken" .... ;„omdat juist de synthese van die beide denkrichtingen (nl. de experimentele en de mathematische) het wezen der anorganische wetenschap uitmaakt."

Vooral voor de hogere leerjaren schat hij haar betekenis als denkoefening zelfs nog hoger dan die der wiskunde! Al valt het mij als wiskundige zwaar dit te moeten toegeven en al moet ik, aangezien mijn ervaring zich tot het onderwijs in de Wiskunde en de Natuurkunde beperkt, de Scheikunde hier buiten beschouwing laten — m.i. heeft hij daarin toch gelijk!

Dat wil natuurlijk niet zeggen, dat dus het wiskunde-onderwijs aan degenen, die niet in een der β-faculteiten verder studeren willen, in haar tegenwoordige gedaante geheel moet verdwijnen en dat slechts die dosis mathematiek toegediend moet worden, welke nodig is voor het physica onderwijs. Er zijn nog argumenten genoeg, die de wiskunde om haarzelfs wille voor alle middelbaar onderwijs onontbeerlijk maken — nog afgezien van het feit, dat de boven zo gewenst genoemde synthese van experimentele en mathematische denkwijze toch een behoorlijke mate van vertrouwdheid met de laatstgenoemde postuleert.

Neen de kwestie is of bij het onderwijs in de exacte vakken aan de α's niet het accent verschoven moet worden naar de physica ten nadele van de wiskunde. Of de rollen niet omgekeerd moeten worden, of de wiskunde niet een „aflopend vak" en de natuurkunde niet een „eindexamen vak" moet worden.

Er zijn vanzelfsprekend bezwaren — b.v. dat het gevaar om er op het examen een „memorie-vak" van te maken bij de physica waarschijnlijk meer dreigt dan bij de mathesis. Doch dit ligt voor-

namelijk aan de opvattingen van de leraar omtrent lesgeven en examineren. Ook wiskunde-examen-dril is zeer wel mogelijk!

Daar staat echter iets anders tegenover. De school is niet alleen een instituut waar mentale training wordt bedreven om daardoor te komen tot verhoogde intellectuele prestaties. Uit reactie op het „algemene ontwikkelings" ideaal is men deze taak steeds meer op de voorgrond gaan plaatsen. Maar dit neemt niet weg, dat de school ook een culturele taak heeft, welke bestaat in het overdragen van culturele goederen aan de volgende generatie. In dit opzicht speelt zij een zeer belangrijke rol — nl. die van het cultureel op peil houden van het volk. Het is misschien wel zo, dat deze taak veelszins intellectualistisch werd opgevat — maar de bezwaren worden anderzijds ook sterk overdreven. Cultuur is niet uitsluitend kunstgeschiedenis, muziek en aanverwante artikelen. Trouwens de kunstgeschiedenis komt er werkelijk niet zo erbarmelijk slecht af op het huidige Gymnasium als men dat wel eens wil doen voorkomen. Maar vooral: alles wat met de natuurwetenschappen te maken heeft is niet alleen maar barbarij en materialisme. Integendeel:de moderne cultuur — zoiets bestaat toch, of is het met de cultuur al net zo gesteld als met de schilderijen, nl. dat hun waarde recht evenredig is met het kwadraat van hun ouderdom? — de moderne cultuur en het moderne denken staat onder sterke invloed van de resultaten en de denkwijze der natuurwetenschappen. En een middelbare school schiet te kort in de culturele vorming van de jonge mens, indien zij hem daarvan geen begrip heeft bijgebracht, indien zij hem in onwetendheid heeft gelaten over de omwenteling in het denken, die in de 16e en 17e eeuw heeft plaats gevonden. Nu kan mentale training door concentratie der leerstof intensiever worden — maar culturele vorming mag niet te eenzijdig zijn. Dat wil niet zeggen, dat van allerlei gebieden allerlei wetenswaardigheden moeten worden ingepompt — maar wel, dat er een zekere openheid of belangstelling moet worden gevormd. Ook hier dus weer een geesteshouding, een gewoonte, een habitus. Doch deze verkrijgt men niet door de leerling practisch geheel buiten grote cultuursectoren te houden.

In dit opzicht schiet het huidige Gymnasium-α programma sterk te kort en dit is m.i. mede een oorzaak van het ontstellend gemis aan begrip voor deze betekenis der natuurwetenschappen, dat in uitgebreide intellectuele kringen wordt gevonden. Ik heb eens een leerling gehad, die de β-richting koos en op de vraag, waarom hij dit deed, antwoordde: „omdat ik later predikant wil worden!" Een

treffend staaltje van inzicht in hetgeen hij voor zijn toekomstig ambt nodig had.

Voor dit aspect der vorming is echter de natuurkunde — gecombineerd met de scheikunde — van meer betekenis dan de wiskunde, aangezien onze moderne cultuur veel directer en intensiever door de natuurwetenschappen wordt beïnvloed, dan door de wiskunde.

Maar het is niet de bedoeling hier een pleidooi voor het natuurkunde-onderwijs te houden, doch de merites van de wiskunde als onderwijsvak te beschouwen. Alleen is het een eis der objectiviteit ook de relatieve voordelen van andere vakken te bezien. En ik kan niet inzien, dat door de zaak in dit licht te bezien de wiskunde op school verlaagd wordt tot een hulpvak, een dienstmaagd van het natuurkundig onderwijs. Haar wordt slechts haar eigen plaats tussen de andere vakken aangewezen en de organische eenheid van het gehele onderwijs kan er slechts mee gebaat zijn. Had ook de bekende Reformbeweging van Felix Klein c.s. niet als één van haar hoofddoeleinden juist het z.g. utilitaristisch principe gesteld: „die Fähigkeit zur mathematischen Betrachtung der uns umgebenden Erscheinungswelt zur möglichsten Entwicklung zu bringen."

Daardoor wordt ook aan de wiskunde de juiste betekenis gegeven en haar wezenlijke waarde aan de jeugd getoond. De wiskunde is toch niet — tenminste voor mij niet — een min of meer interessant spelletje! Waarom dan niet facultatief schaak- of bridgelessen gegeven? Maar wij mogen de imposante mathematische concepties de jeugd ook niet voorhouden als een grootse schepping van de autonome menselijke geest. Haar ware betekenis ligt m.i. in het onlosmakelijk verband tussen haar en de natuurwetenschappen. Een verband zo nauw, dat — zoals Bottema terecht zegt — niet meer van een „toepassing" der wiskunde bij de physica gesproken mag worden. Natuurwetenschap zonder wiskunde is even onmogelijk als letterkunde voor een volk zonder taal. Dit beeld werd ook reeds gebruikt door Galilei, Boyle en vele anderen. Maar steeds meer is in de loop der eeuwen deze „lotsverbondenheid" openbaar geworden. Zó, dat Jeans, Eddington, e.a. spraken over „the mathematical pattern", welke aan de kosmos ten grondslag ligt. Gold als ideaal verklaringsmiddel in de vorige eeuw het mechanisch model, nu is het de wiskundige betrekking. In elk geval lijkt het wel of de wiskunde de enige sleutel is, die tot de anorganische wereld toegang geeft, of de wiskunde het enige middel is om een adaequaat beeld te geven van de realiteit.

Hierop vooral zou ik de uitspraak willen baseren, dat gedegen onderricht in de wiskunde voor elk soort onderwijs, dat de poort der

Universiteit opent, onontbeerlijk is. Niet alleen of misschien zelfs niet in de eerste plaats door de mentale training, die het schenken kan — ofschoon het daartoe ook zeer geschikt is, mits aan zekere nader te bespreken voorwaarden wordt voldaan — want in dat opzicht is het niet beslist onmisbaar, maar wel wegens de sleutelpositie, die de mathesis inneemt in het gebied van de kennis der natuur en daardoor op het ganse terrein der moderne cultuur. Maar het kan dan ook eerst volledig tot zijn recht komen, indien het in de hoogste klassen zo al niet uitloopt op, dan toch in zeer nauw verband gebracht wordt met het natuurkunde-onderwijs.

Hiermede is een voorlopig antwoord gegeven op de in de aanvang voorop gestelde vraag: welke waarden kan en moet het wiskunde-onderwijs aan α's schenken en blijkt daaruit, dat het onontbeerlijk is? Het antwoord is gematigd optimistisch — in elk geval niet negatief. De kwestie is nu: hoe moeten wij dit nastreven — vooral wat betreft het scholen van het systematisch denken en het wennen aan wat ik boven de denktucht heb genoemd.

En dan wil ik beginnen met één ding naar voren te brengen, in welk opzicht m.i. de wiskunde als onderwijsvak niet te overtreffen en onvervangbaar is. En dat is het veel gesmade vraagstukken maken.

Natuurlijk is het mogelijk — misschien moet ik wel zeggen: gebruikelijk — dit onderdeel te degenereren tot een opsporen en memoreren van veel voorkomende loopjes en trucjes. Maar dit neemt niet weg, dat het goed gebouwde vraagstuk een zeer vruchtbaar didactisch hulpmiddel is — vooral wat betreft het scholen van het systematisch denken en het vormen van bovengeschetste denkgewoonten. Immers hier heeft men telkens weer in het klein een voorbeeld van wat wij boven een probleemsituatie hebben genoemd, welke door systematisch zoeken tot een oplossing moet worden gevoerd. Daar de overdracht bewust moet geschieden is het m.i. van het grootste belang, dat dit onderdeel op de wiskundeles zeer grondig en van uit dit gezichtspunt wordt behandeld. Dus niet door in snel tempo een serie vraagstukken op het bord op te lossen, maar door in gezamelijke arbeid van docent en klas er één of misschien twee in een uur methodisch door te nemen.

Eerst een grondige analyse der gegevens. Elk gegeven wordt afzonderlijk beschouwd — b.v. terwijl de figuur wordt opgebouwd, waarbij telkens wordt gevraagd naar de omtrent dit figuurdeel reeds verworven kennis. Op dezelfde wijze bekijkt men het gevraagde, waarbij vooral gezocht wordt naar vroeger reeds deugdelijk gebleken oplossingsmethoden. Dit aandachtig beschouwen en analyseren van het gegeven en het gestelde, dit onderzoek van de voor-

afgaande „theorie" om voor de oplossing bruikbare stellingen te ontdekken is tevens een pracht repetitie van de theorie.

En dan komen de ideeën los (tenminste dat zullen we hopen!). Een bezwaar is, dat alleen de gewiekste leerlingen hier een rol spelen — maar, och, die mogen toch ook wel eens een pleziertje en behoeven zich toch niet aldoor te vervelen. Bovendien kan men de ideeën laten noteren of de vraag persoonlijk tot een niet-vlugge leerling richten. Want het gevaar bestaat inderdaad, dat de klas er aan gewend raakt er op te rekenen, dat enkele begaafden die lastige leraar wel met voorstellen zullen tevreden stellen. Immers het blijft waar, dat de vruchtbaarheid in dit opzicht zeer verschillend is en niet aan te leren en dat het zeer ontmoedigend werkt als onze „goede invallen" telkens blijken volkomen fout te zijn. Maar het ontstaan der „vermoedens" kan toch wel bevorderd worden, b.v. door de stukken van de puzzle in het bewustzijn te etaleren — ze schuiven dan dikwijls vanzelf in elkaar. En door systematisch de vroeger gevonden oplossingsmethoden na te gaan. En door het speuren naar regelmatigheden en bijzonderheden, die ons de sleutelzet kunnen verraden. Een hulplijn moet ook niet uit de hemel komen vallen, maar op redelijke gronden getrokken worden — b.v. om verband te leggen tussen gegeven en gevraagde elementen.

Nu moeten de geopperde ideeën gecritiseerd en getoetst worden. Onder onze leiding, maar door de leerlingen zelf (indien tenminste enigszins mogelijk). Vooral niet zonder uitleg door ons geaccepteerd of — wat erger is en ook meer voor de hand ligt — verworpen. Een goedgekeurd voorstel vindt tenslotte nog zijn rechtvaardiging in de straks volgende juiste oplossing. Maar een door onze banvloek alleen geëlimineerde idee komt niet meer ter sprake en mist dus alle zin en doel. Wij moeten dus erg voorzichtig zijn met ons veto-recht (zoals trouwens iedereen!). Want ten eerste zitten wij vaak veel te vast aan onze eigen ideeën. Wij zijn dan geneigd de goede — d.w.z. de onze — er direct uit te kiezen om zo spoedig mogelijk het einddoel te bereiken. Welk einddoel? Het wiskundige of het paedagogische? Het gaat er toch niet in de eerste plaats om een korte, elegante of verrassend eenvoudige oplossing te bereiken — doch om de jeugd er aan te gewennen zelf de zaak tot klaarheid te brengen. En zo komen wij tot de tweede reden om de voorzichtigheid in het hanteren van onze superioriteit(!) te betrachten. De jeugd is nl. veel en veel spoediger en gemakkelijker gewend aan het klakkeloos accepteren van en geloven op gezag in onze wijsheid, dan aan het zelf denken en zelf zoeken.

En dit is funest voor alle onderwijs — maar speciaal voor dat in de wiskunde.

Niet elk vraagstuk leent zich hiertoe — wij moeten ze van te voren wel goed uitzoeken en doordenken. Trouwens ook niet elke klas leent zich even gemakkelijk hiertoe — maar dat weet u zelf veel te goed!

De laatste fase — het controleren of de gevonden oplossing inderdaad juist is, is meestal niet scherp van de vorige te onderscheiden. De wiskunde draagt het waarmerk van het echte in zich zelf. Of zoals Willmann ergens zegt: „elke fout verraadt zich zelve, elke nalatigheid vindt weldra haar straf; de wiskunde draagt overal haar rode inkt mee. Daarom gewent ze aan omzichtigheid in de bewering en aan gestrengheid in het oordeel".

Een voordeel van de wiskunde is, dat de gegevens en wat men verder nodig heeft in aantal beperkt en vrij gemakkelijk te overzien blijven.

Een tweede, nog groter voordeel is, dat op ander terrein de zelfcontrole op de intuïtief of door redeneren gevonden oplossing dikwijls de capaciteiten van de leerling verre te boven gaat. De wiskunde biedt de mogelijkheid hiertoe meestal wel — ja ze dwingt ertoe, waardoor bij de leerling de behoefte tot zelfcritiek kan ontstaan. Ook bij het vertalen bestaat deze noodzaak, maar terwijl daar nogal veel speelruimte blijft voor misschien-juiste of half-juiste oplossingen — is het typische van het wiskunde-probleem, dat de juiste en onjuiste oplossingen veel scherper tegenover elkaar staan. Is dit enerzijds een nadeel tegenover de filologie, waar men een zekere tact of feeling moet ontwikkelen om betere en slechtere vondsten te onderscheiden — anderzijds biedt het een groot voordeel, omdat de critiek zelf kan worden uitgeoefend.

Want het zelf vinden is paedagogisch belangrijk, maar het zelf critiseren, de zakelijke critische houding tegenover eigen gedachten is nog belangrijker!

Tenslotte opent het vraagstukken-maken een prachtig veld voor zelfstandig of gemeenschappelijk werken, biedt het differentiatie mogelijkheden t.a. van vlugge, langzame en weinig begaafde leerlingen, aangezien wij naar behoefte meer of minder gecompliceerde situaties kunnen scheppen. Ze moeten ze nl. tenslotte zelf maken (met of zonder aanwijzingen) en daarom meen ik, dat werkelijk hierin — mits goed gebruikt en onderwezen — een pracht mogelijkheid tot oefening van zelfstandig denken en een stimulering van eigen werkzaamheid gelegen is, welke veel meer resultaten afwerpt

dan het inprenten van correct geformuleerde uitkomsten van anderen, hoe nuttig dat op zichzelf misschien ook moge zijn.

Ik ben het dan ook niet met Dijksterhuis eens, als hij ergens beweert, dat men teveel van de overtuiging uitgaat, dat het wiskunde-onderwijs moet leiden tot het maken van vraagstukken. „Moet leiden tot" is natuurlijk wat kras uitgedrukt, maar wel zou ik willen beweren, dat het wiskunde-onderwijs op dit terrein zijn rijkste vruchten kan plukken.

Het is ongelukkig, maar waar, dat het heel moeilijk is met de α's tot dit vruchtbare gebied door te dringen, omdat een zekere inventie en actieve belangstelling daarvoor onontbeerlijk is. Dat het niet goed mogelijk is, is juist mijn hoofdbezwaar tegen het wiskunde-onderwijs aan α's. Men kan er niet uithalen, wat erin zit en het allerbelangrijkste, het meest vormende element ontbreekt er aan.

Dijksterhuis tracht daarom het wiskunde-onderwijs aan α's op andere leest te schoeien, door meer de aandacht te vestigen op de structuur der mathematische redeneringen en op de overheersende rol, die de wiskunde in het Griekse geestesleven steeds heeft gespeeld. Hierdoor zouden ook den α-leerlingen logische waarden van grote betekenis geboden worden en „algemene inzichten in de vermogens van het menselijk denken worden ontwikkeld".

Ik sta hier nogal sceptisch tegenover. Kan de leerling dit alles verwerken; zo assimileren, dat hij de redenering zelf opnieuw voert — d.w.z. er de zenuw, de kern van vat? Want wat doet hij — hij kiest de lijn van de minste weerstand, hij memoriseert. Maar dan is het duidelijk, dat hij het niet begrepen heeft. De verleiding van het uit het hoofd leren ligt hier zo voor de hand en is zo sterk, dat een zondeval bijna niet te voorkomen is. Mannoury zegt in „Woord en Gedachte": „ik heb wel eens de indruk gekregen, dat menig bezitter van een fraai einddiploma H.B.S. of Gymnasium zich gemakkelijker bij onbegrepen wijsheden neerlegt, dan hij gedaan zou hebben, als hij niet zoveel jaren in het aanhoren en napraten van onbegrijpelijkheden geoefend was ... En dàn is het toch wel zonde van de tijd en de moeite, aan die oefening besteed!" Daar komt nog bij, dat genoemde leerstof zo moeilijk is te examineren. Dat klinkt natuurlijk niet fraai in een oratie over onze idealen. Het gaat toch niet om het examen, doch om de vorming. Ja, ja — laat ik dus liever zeggen: het is zo lastig te controleren of de stof begrepen is; de innerlijke overtreding is niet zo eenvoudig te constateren, waardoor de docent de leerling zo moeilijk van het slechte pad kan afhouden!

Daarom: bij vruchtdragend onderwijs in de wiskunde behoren vraagstukken, niet om de jeugd er *op* te drillen, maar om ze er *mee* te drillen tot de geestelijke tucht van het systematisch denken.

Indien nu blijkt, dat het onderwijs in de wiskunde nuttig kan zijn voor allen en de vorming van goede denkgewoonten kan bevorderen, waarom dan zo weinig resultaten er van gezien? Ik bedoel niet wat het eindexamen betreft. Dat gaat meestal wel zo'n beetje — ze kunnen soms aardig meepraten over de examenstof. Maar het gehele onderwijs in de laatste schooljaren laat toch een onbevredigende indruk achter. In de 4e klas is er meestal behoorlijke medewerking en soms enthousiasme bij het gezamelijk zoeken naar een oplossing van het voorgelegde probleem — maar in 5*a* of 6*a* bijna niet. Het lijkt wel een inerte massa, die je soms tot wanhoop brengt door over allerlei kleinigheden en op de meest onverwachte punten te struikelen. Ze kunnen niets *zelf* doen. Het is geen obstructie of sabotage, als de verhouding tussen leraar en klas goed is.— maar de innerlijke belangstelling ontbreekt bij 90 % der leerlingen totaal.

Heeft dit onderwijs nog zin — schenkt het nog vorming — ja, doet het geen kwaad? Heeft het geen gevaarlijke neveneffecten, die in plaats van karakter-vormend, karakter-bedervend werken? Want geestelijke inspanning heeft grote morele betekenis — ik zal de laatste zijn om voor slapheid in dezen te pleiten — maar het moet dan ook geestelijke, persoonlijke inspanning zijn, die bovendien ook eens het zoet van het succes proeft. We spreken zoveel over de grote paedagogische waarde van de vreugde van het *ἕυρηκα* of van het plotseling doorzien — zoals bij die jongen, waarvan Kerschensteiner vertelt, die in de klas in eens opstond en uitriep „wat was dat mooi, Herr Doktor". Maar hebben wij wel eens gedacht aan het veel meer voorkomende omgekeerde geval? „En heb je het begrepen gisteravond, Martha?" — Een verheugd: „ja meneer". En dan blijkt de som alweer fout te zijn of dan blijkt die onverbeterlijke vitter op zijn stoel voor de klas weer niet tevreden met het ijverig geleerde bewijs, omdat twee essentiele schakels zijn verwisseld of om een andere duistere reden. Dit moedeloos naar haar plaats gaan, dit telkens weerkerende gevoel van: „ik kan het dus toch niet" werkt destructief! Ik geloof, dat het werkelijk geen overdreven onzin is wat de psychologen ons daaromtrent voorhouden.

Hoe komt dat toch? Geen aanleg voor de wiskunde? Of beter: komt dan de typisch a-mathematische aanleg zoveel voor? Ik kan

het me niet indenken! Katz in zijn „Pyschologie und mathematischer Unterricht" wijst er m.i. terecht op, dat de schoolwiskunde met het eigenlijk wiskundig denken weinig te maken heeft. Om een werkelijk goed en productief mathematicus te zijn is wel degelijk een specifieke begaafdheid nodig. Maar voor de wiskunde op school is niet meer of een andere aanleg nodig, dan voor de overige vakken — elke intelligente leerling moet het kunnen volgen. Het tekort schieten is volgens hem terug te voeren tot „gemis aan belangstelling" of zelfs „afkeer". Ja, maar is dat dan geen kwestie van aanleg?

Pascal, de alzijdig begaafde en dus uitermate tot oordelen bevoegde, wijst er op, dat de principes der wiskunde (géometrie) zover buiten het gewone leven liggen, dat het moeite kost „à tourner la tête de ce côté là, manque d'habitude". Sommige geesten, hij noemt ze les esprits fins, „ne peuvent du tout se tourner vers les principes de géometrie". En wanneer men hen zo iets voorlegt, waarvan ze de zin niet kunnen vatten, dan worden ze er door afgeschrikt en krijgen er een afkeer van. De vraag is echter of deze „habitude" slechts een gewoonte is of een zo diep grijpende gesteldheid, dat het een onoverkomelijk bezwaar is voor alle wiskundeonderwijs. Ik heb de indruk, wat dit laatste betreft, van niet; wel echter dat wij de afkeer zelf bevorderen en een minder afwijzende houding best zouden kunnen aankweken. Hoe dit zij, het staat wel vast, dat veelal zekere psychische factoren (hetzij bewust, hetzij onbewust, hetzij gewild, hetzij ongewild) de leerling verhinderen alle benodigde energie en concentratie aan te wenden om dit vak te overmeesteren. Dit vindt zijn oorsprong voor een zeer belangrijk gedeelte in de aard van de stof, welke wel zeer eenvoudig en weinig gecompliceerd is, maar daardoor zo abstract en levensvreemd, dat de prikkel tot het activeren van het denken, die toch voor een groot deel uit de emotionele sfeer moet komen, ten enenmale ontbreekt. Het resultaat is: ontmoedigende ervaringen en het gevolg daarvan een apathie of tegenzin, die bijna niet te overwinnen is en welke bovendien in de hand gewerkt wordt door de positie van het vak op school en door het besef, dat het eindexamenresultaat, mits niet al te slecht, weinig gewicht in de schaal legt.

Daar komt nog bij, dat het thuisfront ondermijnd is. Er is een zekere traditie. Een *α* behoort geen wiskunde-enthousiast te zijn. Zijn vader of zijn oom had er ook al last mee .... en is daar trots op. Wiskunde is het enige vak, waar de „intellectueel" zonder schaamte van kan betuigen, dat hij er niets van begrijpt.

Zoals ik reeds zeide, leggen wij echter waarschijnlijk de grondslag

van deze Mathematik-feindlichkeit voor het grootste gedeelte zelf en bemerken wij later de funeste invloed van didactische fouten, gepleegd bij de eerste kennismaking met het vak. Hierdoor worden vele leerlingen van stonde aan in een afweerhouding gebracht, waaruit zij bijna niet meer verdreven of gelokt kunnen worden. Het gebeurt niet zelden, dat bij het naderend eindexamen de prestaties eensklaps sterk verbeteren. Meestal krijgt men dan als oorzaak hiervoor opgegeven: „ik heb het nu eens serieus geprobeerd, ik wist niet dat het zo eenvoudig was." Het merendeel der serieuze leerlingen tracht echter toch de weg van de minste weerstand te volgen, d.i. een beroep te doen op zijn (meestal: haar) geheugen.

De in de 1e klas verworven instelling — hetzij van afkeer, hetzij van „leer maar uit je hoofd, maar dan precies" — heeft veel meer gevolgen, dan bij andere vakken, daar het missen van de beginschakels het gehele vervolg beïnvloedt. Daarom zullen wij bij het beginonderwijs zeer sterk rekening moeten houden met de psychische structuur van het kind, welke — het zij ten overvloede gezegd — totaal verschilt van de onze, en als volwassene en als wiskundige. Dit is niet alleen van belang voor de persoonlijkheidsvorming, maar ook op het engere terrein der mentale training. Hoe zou deze laatste effect kunnen sorteren, als het kind niet mee doet? Hoe kan men zich aanwennen zelfstandig te denken, als men het — bewust of onbewust — niet wil? En wij kunnen hier niet eenvoudigweg zeggen: het moet maar willen! Het assimileren van, het gevormd worden door de leerstof is een innerlijk proces, dat men niet met uiterlijke middelen kan afdwingen. Een timmerman houdt ook rekening met de aard van het hout — hoeveel te meer wij, die met zoveel fijner gestructureerd materiaal van doen hebben.

Ik sta hier natuurlijk maar wat open deuren in te trappen, want dit weet iedereen en zal niemand ontkennen. Ik zou citaten van Poincaré, van Heyting, enz. kunnen aanhalen — maar dat is niet nodig. Ook de voorstanders van de zg. „logische" richting in de didactiek der wiskunde ontkennen het niet.

Zoals U weet is men gewoon op dat terrein de psychologische en de logische richting te onderscheiden. Ook wel gezegd — de rekkelijken en de preciezen — maar dan t.a. van de wiskunde en niet t.a. van de kinderlijke psyche genomen. De verschillen zijn op de keper beschouwd niet zo heel groot — maar het accent wordt toch heel duidelijk anders gelegd.

Dijksterhuis vindt b.v. de eis tot epistemisch onderwijs in de wiskunde zo belangrijk, dat hij dit principe reeds van de eerste lessen af wil laten doorwerken. Hoe men de wiskunde aanpakt of

inleidt doet er niet toe, maar de leerling zal de verworven inzichten klaar en duidelijk moeten kunnen formuleren. Want men kan niet iets helder denken zonder het zuiver te zeggen. Nu — dat is kras gezegd! De taalbeheersing van de leerling speelt hierbij toch ook een grote rol — zou men dan niet beter doen wat later met het wiskunde-onderwijs te beginnen? De voornaamste oorzaak van het geringe succes ziet hij in het adembenemende tempo. De epistemici ontkennen echter ten sterkste, dat het door hen voorgestane onderwijs in de wiskunde de kinderziel zou mishandelen. Tegen het verwijt, dat zij niet voldoende rekening houden met psychologische gegevens, verdedigen zij zich met te wijzen op de tegenstrijdige resultaten en interpretaties van vele onderzoekingen en de voorbarigheid, waarmee sommigen hun hervormingsplannen willen doen steunen op aanvechtbare gegevens.

Hier wordt inderdaad de vinger op een wonde plek gelegd. Velen aanvaarden zonder critiek alles wat door beroepspsychologen is geschreven en voor vaststaand wordt verklaard, terwijl een oppervlakkige oriëntatie op dit gebied leert, dat er niet veel feiten zijn, waarover alle geleerden het werkelijk eens zijn! Maar dit staat toch wel vast, nl. dat de speciale didactiek bepaald wordt daar drie dingen: de aard van de kinderlijke geest, en die van het vak en de relatie, die er tussen de menselijke geest en de inhoud van het vak ontstaat. En ik geloof toch wel te kunnen zeggen, dat ons wiskundig onderwijs mank gaat aan een te weinig georiënteerd zijn op het kind en een teveel gefundeerd zijn op de structuur van de leerstof. Het ligt bij de wiskunde voor de hand dit te doen, anders loopt het grote kans te degenereren — dit is zo. Maar over het algemeen, om eens iets te noemen, wordt toch de stof te veel geponeerd, te weinig ontwikkeld, ofschoon anderzijds ook toegegeven moet worden, dat het vak zich moeilijk tot de genetische methode leent.

Maar het kan toch niet ontkend worden, dat de opmerking van V a n I m p e: „Waarom is dit vak voor zovelen een doolhof? Omdat het teveel wiskunde en te weinig onderwijs is" juist is.

Om dit te verbeteren hebben wij de hulp van beroepspsychologen nodig. Men verwerpt hun arbeid dikwijls wel als grauwe theorie en beweert, dat onze eigen ervaring ons heel wat meer practische psychologie leert — maar niet iedereen is op dit terrein even begaafd. En wij zijn altijd maar a l l e e n bezig en zien nooit eens een ander aan 't werk. Dit bezig zijn met de wiskunde in de klas — of beter: dit bezig zijn met de klas in de wiskundeles, leert men niet uit een didactisch artikel over methoden ter behandeling van een bepaald onderdeel. Neen het is zeker niet zo, dat wij wiskundigen het wel

alleen af kunnen. Dit voelt L i e t z m a n n dan ook zeer wel aan, waar hij als 't ware om een kruimeltje bedelt, als hij vraagt om een inzicht — al was het slechts een zeer ruwe benadering — in de mathematische capaciteit als functie van de leeftijd. Dat zou reeds een niet hoog genoeg te waarderen basis schenken voor de opstelling van een leerplan!

Op dit ogenblik zal men echter nog met grote voorzichtigheid te werk moeten gaan. Want wij moeten f e i t e n hebben en hoe kunnen wij onderscheiden tussen feiten en al te gemakkelijk getrokken conclusies?

Zo meent T u r k s t r a, dat de onderzoekingen van S c h l ü s z l e r in geen geval steun verlenen aan de vaak geuite mening, dat het onderwijs in de wiskunde op de middelbare school te vroeg aanvangt — doch dat wij alleen maar voorzichtig moeten zijn met een al te abstract inzetten ervan. Nu is het inderdaad juist, dat de redenering van M e u m a n n e.a. aanvechtbaar is. Maar daarmede is de stelling, dat het 12-jarige kind over 't algemeen nog niet vatbaar is voor onderwijs in de wiskunde nog niet onjuist gebleken. Alleen de aangevoerde gronden blijken niet steekhoudend te zijn. Omgekeerd volgt uit het feit, dat kinderen — zelfs jonge kinderen — „logische conclusies" kunnen trekken nog niet, dat zij wel geschikt zijn voor het wiskunde-onderwijs — zelfs niet voor die onderdelen, waarbij bijna uitsluitend syllogistisch geredeneerd wordt.

W a t e r i n k b.v. bestrijdt dit laatste [1]). En ik voor mij voel veel voor zijn opvattingen, omdat zij gebaseerd lijken op feitelijke gegevens en vooral op een analyse van wat eigenlijk onderzocht moet worden — nl. het intelligent functioneren in de wiskunde-les. De intelligentie vertoont nl. een zeer gecompliceerde structuur en deze analyse doet weldadig aan in vergelijking met het „logisch redeneren", „logisch denken", „wiskundig denken", „wiskunde denken", enz. dat wij bij vele anderen zonder nadere precisering ontmoeten.

De onderzoekingen, die zich richten op het syllogistisch denken bij kinderen, zegt W a t e r i n k, gaan bijna altijd uit van min of meer navoelbare of inleefbare situaties. Bij het onderwijs in de wiskunde treffen wij deze echter juist niet aan — en dat maakt, zoals wij boven opmerkten, een zeer groot verschil; zo groot, dat men er geen conclusie uit trekken kan t.o. van de vatbaarheid voor dat onderwijs.

Bovendien is het kunnen leren van wiskunde en andere exacte vakken niet in de eerste plaats een zaak van goed kunnen werken met logische reeksen. Niet deze „logische functie" is het meest

---

[1]) „Didactische opmerkingen over het onderwijs in de exacte vakken op de middelbare school". Congres 1940.

wezenlijk in dezen, maar „wel de geschiktheid om dingen ruimtelijk voor te stellen, om bepaalde ordelijke structuren te herkennen en het vermogen om synthetisch en analytisch te functioneren". Bij een door hem ingesteld onderzoek over ± 500 gevallen bleek een zeer hoge correlatie te bestaan tussen deze geschiktheden en de prestaties in de wiskundeles. Terwijl vele van de afwijkingen bij nader onderzoek te verklaren waren uit een gebrek aan inventief vermogen. Voorts bleek uit hetzelfde test-materiaal, dat deze vermogens zich eerst in het 13e à 14e levensjaar openbaarden en ontwikkelden. Vandaar zijn conclusie: tusschen het 12e en 14e jaar groeit de geschiktheid om dit onderwijs te ontvangen geleidelijk, maar het is op 12-jarige leeftijd nog niet algemeen aanwezig. „Het eigenlijke meer abstracte onderwijs in de exacte vakken kan pas gegeven worden na het 14e levensjaar." Het onderwijs in de 1e en 2e klas moet dus een inleidend karakter dragen en zich in een concrete wereld bewegen.

Deze gegevens maken een feitelijke indruk. Indien nadere onderzoekingen tot volkomen bevestiging leiden — en vooral, indien bewezen zou kunnen worden, dat de opgemerkte ontwikkeling in de genoemde functies niet het gevolg (of voor het grootste gedeelte het gevolg) is van het ontvangen wiskunde-onderwijs zelve — bv. door deze na te gaan bij kinderen, die dat onderwijs niet ontvangen — dan moet de conclusie ook geaccepteerd.

Dit laatste lijkt mij wel aannemelijk. Immers de genoemde functies ontwikkelen zich volgens het onderzoek niet gelijktijdig. Er bestaan onderling vrij grote verschillen. De eerstgenoemde ontwikkelt zich vooral na de 12e verjaardag; de synthetische functie ongeveer in het 14e levensjaar; de analytische ± 1½ jaar later; terwijl het „ordenend vermogen" eerst op 14-jarige leeftijd enigszins behoorlijk ontwikkeld is. Deze verschillen zou men niet verwachten, indien het onderwijs zelve voornamelijk voor hun ontstaan en ontwikkeling verantwoordelijk was. Immers indien dit zo ware, dan zouden zij zich waarschijnlijk toch ook gezamenlijk en gelijktijdig ontwikkelen!

Dit is een zeer belangrijke kwestie. Want beginnen wij te vroeg met het onderwijs in de wiskunde, voor het kind er rijp voor is, dan is er ook geen begrip voor mogelijk. Het is echter niet maar een verloren jaar, want het toch ondervonden of ondergane onderwijs werkt negatief. Het doodt de belangstelling, misschien wel eens en voor al. En de invloed van de belangstelling kent U allen. Katz beweert zelfs, dat grote verschillen in resultaten een gevolg zijn van grote verschillen in belanstelling en niet van grote verschillen in begaafdheid. Want grote belangstelling veroorzaakt veel er mee bezig zijn, veel herhalen, en dit heeft een geweldig effect op de

prestatie. Voor deze interesse is niet een specifieke begaafdheid nodig; ik geloof, dat dit uit de practijk wel blijkt. Ze kan ook gewekt en verworven. Ze kan echter ook gedood worden en dan is ook ons onderwijs dood en zonder effect! Het komt mij voor, dat dit gevolg van een te vroeg beginnend onderwijs in de wiskunde, gevolgd door een te veel op het vak geïnspireerde en niet de geestelijke activiteit prikkelende methode, één van de grondoorzaken is van de afweerhouding tegenover de toch al weinig tot het kind sprekende wiskunde, die ons onderwijs in 5α en 6α zo moeilijk en zo weinig vruchtbaar maakt. [1]).

Resumerende: Is Wiskunde Onderwijs voor α's noodzakelijk?

Mijn antwoord is ontkennend, als wij de „α — in engere zin" bedoelen, de leerling van 5α of 6α, omdat de training, die dit onderwijs schenken wil dan ook door andere vakken — b.v. door de natuurkunde — en in sommige opzichten zelfs beter, gegeven kan worden. Daarom moet in sommige gevallen de mogelijkheid geopend worden de wiskunde te laten schieten. Maar de wiskunde en de exacte vakken na de 4e klas geheel te laten vervallen, zoals het ontwerp Bolkestein voor het Lyceum A voorstelt, lijkt mij geheel onjuist. De α-opleiding zou dan te eenzijdig worden. Wij hebben mensen nodig, die ook een zekere belangstelling en een open oog bezitten voor problemen en stromingen, welke niet tot

---

1) Strijdt hiertegen niet hetgeen boven is gezegd over het verschil in de 4e klas en in 5α ondervonden — zoals een scherpzinnig collega opmerkte? Immers indien de oorzaken der α-mentaliteit gezocht moesten worden in de 1e klas, hoe dan het verschil tussen 4e en 5e klas te verklaren? Moet de oorzaak dus niet gelegen zijn in de positie van het vak in de α-afdeling, in de sfeer, die het op school en thuis omgeeft?

Inderdaad is dit een belangrijke factor — maar m.i. toch niet de belangrijkste! Naar mijn ervaring toch doen de „goede" α's wel degelijk goed mee in 5α en 6α, hoewel het hun zwaar moet vallen wegens het ellendig trage tempo van de klas. Ook willen de zwakke, doch serieuze leerlingen (en deze vormen toch altijd nog het merendeel) wel — d.w.z. zij spannen zich in zekere mate in. Maar zij „kunnen" niet — d.w.z. meer onbewuste remmingen verhinderen hen zich werkelijk er aan te wijden. En deze remmende psychische factoren zijn m.i. voor het grootste gedeelte door onszelf in de aanvang in hun ontstaan bevorderd. Dat men dit in de 4e klas niet zo sterk merkt, is een gevolg van de meeslepende werking der overigen. Een geanimeerde discussie, waaraan een groot gedeelte van de klas deelneemt (voor het merendeel a.s. β's), prikkelt ook de „zwakke" broeders en zusters tot meedoen (zonder veel resultaat overigens). De werkelijk „hopelozen" krijgt men natuurlijk niet mee — maar zij vormen in deze klas een kleine minderheid, die niet zo storend werkt. In de kleinere α-klassen vormen zij echter een belangrijk percentage, hetgeen de „zwakken" weer ten ongunste beïnvloedt, en ons sterker opvalt.

de enge kring van hun vak of beroep behoren; en geen bekrompen specialisten, die alles voor barbaars houden, wat buiten hun cultuursector gelegen is. Daarom lijkt mij het ideaal, dat in 5α de keuze open staat tussen de Wiskunde en een vak „Natuurwetenschap", waarin de rol van de wiskunde niet gecamoufleerd is, doch duidelijk aan de dag treedt.

Mijn antwoord luidt bevestigend, als wij de „α — in ruimere zin" bedoelen, de leerling, die het α-eindexamen gaat afleggen, in zijn gehele gymnasiale loopbaan. Het onderwijs in de wiskunde kan nl. bijna ieder intelligent kind een waardevolle vorming schenken, terwijl het als hulpvak voor de natuurwetenschap ook onontbeerlijk is. Het wiskunde-onderwijs aan de oudere leerlingen — dus het echte, waar het op aan komt — kan slechts werkelijk vormend werken, indien het in epistemische zin gegeven wordt, indien het daarbij bewust op de vorming van de gewoonte van het systematisch denken aanstuurt en indien het een zekere mate van belangstelling kan blijven vasthouden of wekken. D.w.z. het mag niet door een te vroege, te strenge en te abstracte inzet zich zelf gehaat en dus steriel maken. Aan deze laatste noodzakelijke voorwaarde voldoet het huidige onderwijs in de wiskunde echter niet.

HET SCHEPPEND VERMOGEN VAN DEN WISKUNDIGE [1])

door

Dr. J. DE GROOT.

De directe aanleiding tot het onderwerp van deze voordracht is een boekje van den bekenden mathematicus Hadamard [1], waarin hij de geesteswerkzaamheid van den wiskundige poogt te ontleden, nauwkeuriger die van den creatieven wiskundige en in het bijzonder die van hem zelf. De bekoring, die van dit boekje, dat een kleine 150 bladzijden telt, uitgaat, schuilt voornamelijk in dit laatste: er is hier een groot wiskundige aan het woord, die ons al vertellend volgens zijn beste weten laat zien hoe hij denkt, hoe hij tot zijn scheppingen komt. Naast eigen introspectie bespreekt hij ook uitvoerig die van Poincaré (vgl. [3]), terwijl ook de meeningen van een aantal psychologen over dit onderwerp vermeld en vaak bestreden worden.

En hier raken we al direct een zeer teer punt van deze kwestie. Dit is een onderwerp, dat allereerst thuis hoort in de psychologie; en een wiskundige, ook al is het een Hadamard, die een aantal boeken over denkpsychologie heeft doorgelezen, is nog geen psycholoog van professie. Dit bezwaar is dan ook hier en daar duidelijk merkbaar. Soms vecht Hadamard als een Don Quichotte tegen windmolens, op een andere plaats worden met veel moeite open deuren ingetrapt.

Hiermede vel ik ook reeds bij voorbaat een oordeel over me zelf: evenmin een psycholoog zijnde, moest ik me ertoe beperken een zoo goed mogelijk overzicht van de nog vrij omvangrijke litteratuur te verkrijgen, die Hadamard niet behandelt, en zal ik bij de verwerking daarvan wel eens een term of een gedachte verkeerd interpreteeren. Dat ik desondanks deze taak toch heb aangedurfd, vloeit voort uit de hoop, dat het onderwerp U evenzeer zal interesseeren als het dat mij doet.

Maar laten wij wiskundigen ook weer niet al te schichtig zijn dit probleem aan te pakken: de psychologen kunnen het zeker niet alleen af; en de enormiteiten, die psychologen soms kunnen debiteeren over de wiskunde en de wiskundigen, geven ons de moed

---

[1]) Voordracht gehouden tijdens de leergang, georganiseerd door het Mathematisch Centrum onder leiding van Prof. Dr. J. G. van der Corput. (Amsterdam, 29 en 31 October 1946).

het wiskundewereldje een oogenblik te verlaten en na te gaan denken over de vraag: hóe komt dat wiskundewereldje tot stand, hoe denken de wiskundigen, hoe komen ze tot nieuwe resultaten, nieuwe theorieën?

Laten we het teleurstellende slotresultaat vooropzetten: eigenlijk weten we het niet; maar is niet alle wetenschap juist dit: nauwkeuriger weten wat we niet weten? De vele beschouwingen, theorieën en experimenten belichten telkens een andere kant van het probleem, waaruit zal blijken, dat het van een zeer gecompliceerde structuur is. Alles wat we dus vooreerst mogen hopen, is een analyse van het probleem, het herleiden tot meer gedetailleerde en nauwkeuriger omschreven grondproblemen.

Voor de empiristisch getinte associatiepsychologie van de vorige eeuw was alles nog betrekkelijk eenvoudig. Zooals bekend, wordt volgens deze theorie het denken uitsluitend beheerscht door associaties tusschen voorstellingen. De elementen met behulp waarvan men alle psychische verschijnselen tracht te verklaren, zijn: 1°. de sensaties, die door van buitenaf komende prikkels verwekt worden, 2°. de voorstellingen, dat zijn de in het bewustzijn achtergebleven sporen der sensaties. Is een voorstelling gegeven, dan worden hiermede andere voorstellingen geassocieerd, en wel volgens de volgende wetten:

1°. voorstellingen, die achtereenvolgens of gelijktijdig zijn opgetreden, associeeren zich; 2°. voorstellingen, die wat hun inhoud betreft op elkaar gelijken of contrasteeren, associeeren zich. Daarbij bestaat er een neiging van de associatiepsychologie tot atomisme; de voorstellingen worden tot in kleinste elementen uiteengelegd; zooals bij Democritus de beweging van een atoom mechanisch overgebracht wordt op steeds weer andere atomen, zoo roept hier de eene uitgangsvoorstelling successievelijk een reeks associatie-voorstellingen te voorschijn. Wil men dus bijvoorbeeld een wiskundestelling bewijzen, dan behooren bij de gegevens bepaalde voorstellingen; laat men nu zijn gedachten de vrije loop, dan worden met deze voorstellingen andere geassocieerd, die echter natuurlijk in het algemeen niet tot het gestelde doel voeren. Daarom dient men hetgeen men moet bewijzen, in het oog te houden, het denken wordt gericht; het in het oog houden van de probleemvoorstelling heeft dan tengevolge, dat bepaalde associaties meer op de voorgrond treden en andere voor het bewijs onbelangrijke associaties verdrongen worden; men krijgt zoo een instelling op een bepaalde voorstellingskring; er ontstaat in het bewustzijn een voorkeursconstellatie. Heeft men een reeks van voorstellingen gevonden, die tot

het gestelde doel voeren, wat op nog allerlei verschillende manieren kan geschieden, dan wordt uit de geschikt gebleken voorstellingen achteraf een logisch sluitend bewijs samengesteld, waarbij vaak voor deze logische preciseering nog nieuwe systemen van min of meer korte voorstellingsreeksen noodzakelijk zijn.

Als eenvoud steeds het kenmerk van het ware was, zouden we hiermee tevreden kunnen zijn. Helaas is de kwestie in wezen niet eenvoudig.

De door de associatiepsychologen zelf uitgevoerde experimenten gaven eerst aanleiding tot een uitbouw en fijnere differentiatie van deze theorie, terwijl tenslotte wel is gebleken, dat zij in wezen onhoudbaar is. Daarmee is natuurlijk niet gezegd, dat er niet een kern van waarheid in schuilt. Kortom: bij het denken speelt het associeeren van voorstellingen een zekere rol.

We willen de ontoereikendheid der associatiepsychologie nog even op twee manieren toelichten. Ziet men twee figuren van gelijke gedaante, dan is volgens de associatiepsychologie bij de waarneming daarvan ook tegelijkertijd de relatie der gelijkheid mede waargenomen. Experimenten hebben evenwel duidelijk gemaakt, dat dit niet het geval behoeft te zijn, met andere woorden: het is mogelijk, dat de relatie der gelijkheid eerst later wordt geconstateerd. Het optreden van de gelijkheidsrelaties in het bewustzijn veronderstelt dus reeds een zekere abstraheerende begripsvorming. Verder blijkt, dat deze begripsvorming zich van alle aanschouwing kan losmaken en dat dus het relatiecomplex zonder meer als een bewustzijnsinhoud aanwezig kan zijn, ingeprent en zoo noodig later weer gereproduceerd kan worden, zonder dat de bijvoorbeeld aanschouwelijke voorstellingen, die tot het relatiecomplex geleid hebben, daarbij mede optreden.

Het is ons allen bekend, dat deze mogelijkheid tot abstractie een essentieele eisch is voor wiskundige praestaties. Een wiskundige, die scheppend werkzaam is, heeft vaak een min of meer vaag, soms visueel, soms ook niet visueel schema als basis (ik kom hier straks nog op terug); dit schema dient om alle elementen van het onderzoek in het beschouwde stadium bij elkaar te houden; het is als het ware de physiognomie van het probleem of geeft ons het probleem in een symbolische voorstelling. Dit schema nu is het product van een vergevorderd abstraheerend proces. Het typische is nu, dat aan zoo'n schema, speciaal als het min of meer visueel is, steeds kenmerken zijn toegevoegd, die dienen om het als een afgerond geheel te kunnen bekijken, maar die niets met het probleem zelf te doen hebben. Zoodra nu het denken verder gaat, dat wil zeggen, zoodra

niet meer alleen het vasthouden van het probleemschema van belang is, maar het verder oplossen van het probleem zelf op de voorgrond treedt, wordt eerst min of meer automatisch van al die overbodige elementen geabstraheerd, men weet als het ware wat in het schema essentieel en niet essentieel is; vervolgens of tegelijkertijd wordt één bepaalde gedachte van het schema door het doelgerichte denken in het oog gevat; daarbij verdwijnt de symbolische voorstelling; de ware relaties treden hiervoor in de plaats en het productieve denken doet tastend een nieuwe stap.

Hiermede is niet gezegd, dat het productieve denken steeds deze weg bewandelt; wij hebben hier alleen een veel voorkomende phase uit het proces geschilderd. We zien daarbij steeds de waarde van „het kunnen abstraheeren". Geschiedt dit niet voldoende, dan wordt dit een bron van fouten, bijvoorbeeld wanneer men de niet-essentieele kenmerken voor essentieele gaat houden.

Dat het abstraheeringsproces soms verwonderlijk snel kan verloopen, wil ik U illustreeren aan het volgende voorbeeld. Ongeveer een jaar geleden was een aantal wiskundigen bijeen na een vergadering van het Wiskundig Genootschap. De volgende puzzle werd opgegeven: gegeven twee personen A en B, ieder in het bezit van milliarden (laten we zeggen vooroorlogsche Hollandsche) munten van iedere mogelijke soort. Deze personen zitten bij een gewone tafel en gaan het volgende spelletje spelen: eerst legt A één geldstuk op tafel, vervolgens B, enz., telkens om de beurt. Ieder is vrij in de keuze van het soort geldstuk en de plaats waar hij het op de tafel neerlegt, mits hij er maar voor zorgt, dat er geen geldstukken geheel of gedeeltelijk op elkaar komen te liggen; tenslotte raakt de tafel vol en komt er een oogenblik, dat er geen enkele munt meer bij kan. Winnaar zal zijn degene, die de laatste munt op tafel legt. De vraag is nu: als A mag beginnen, door de eerste munt op tafel te leggen, hoe moet A dan spelen opdat hij steeds, dat wil zeggen bij ieder tegenspel van B, wint?

De vraag was nauwelijks gesteld, of Prof. Freudenthal vroeg: is de tafel centraal-symmetrisch? Met deze vraag is het probleem opgelost. Het directe zien van het achteraf vanzelfsprekende feit, dat een tafel in het algemeen centraal-symmetrisch is, levert de oplossing. Dit is evenwel niets anders dan een oplossen door zuiver abstraheeren, aangepast aan de aard van het probleem.

Een tweede belangrijk argument tegen de associatiepsychologie is door de zoogenaamde „gestaltepsychologie" naar voren gebracht. Deze zegt terecht, dat iedere waarneming „gestaltekarakter" heeft; dit wil zeggen, een waarneming is niet uit afzonderlijke sensaties

opgebouwd, maar de verschillende deelen der waarneming worden pas door het geheele verband der gestalte bepaald; populair gezegd: het geheel is meer dan de som der deelen. Dit laatste wist de associatiepsychologie natuurlijk even goed, maar zij meende dat uit de verzameling der sensatiepunten én de verworven ervaring het waarnemingsbeeld ontstond. Experimenten hebben evenwel ondubbelzinnig uitgewezen, dat het gestaltekarakter der waarneming wèl geheel of gedeeltelijk in de waarneming zelf ligt opgesloten; voorbeelden van het gestaltekarakter zijn in overvloed te vinden, bijvoorbeeld een melodie, of een geteekende kubus, die als vlakke figuur of op verschillende wijzen ruimtelijk gezien kan worden.

Naast het begrip gestalte is het begrip structuur van belang, dat gebruikt wordt daar, waar van een nauwkeurig omlijnde gestalte nog niet gesproken mag worden; kleine kinderen kunnen bijvoorbeeld wel verschillen tusschen diverse kleuren waarnemen, zien met andere woorden de relaties, die ertusschen bestaan, zonder dat ze nog de kleuren in absolute zin kunnen herkennen. Dit begrip structuur kan men nu uit het waarnemingsleven naar het voorstellingsleven verplaatsen en kan zoo zelfs de geheele situatie aangeven, waarin het individu op dat oogenblik geplaatst is. Voor ons is van belang, dat uit een bijvoorbeeld wiskundige probleemstelling de probleemstructuur groeit, die dus de psychische situatie aangeeft, waarin het individu op een bepaald oogenblik tegenover het probleem staat; de structuur is dus het probleem, zooals het op dat oogenblik voor het individu leeft. In deze totaalstructuur zijn ook opgenomen alle daarmede samenhangende elementen van het wils- en gevoelsleven, de wil bijvoorbeeld om een oplossing in een bepaalde richting of langs bepaalde voorgenomen richtlijnen te zoeken en het gevoel, dat die richting succes heeft. Deze structuur hangt nauw samen met het schema, waarover we in het voorgaande spraken; sommigen identificeeren zelfs de structuur en het schema, dat is slechts een kwestie van definitie; wij zullen dat hier voor de eenvoudigheid ook doen, hoewel het mij verstandig lijkt in vele gevallen tusschen schema en structuur een onderscheid te maken, waarbij dan het schema meer het hulpmiddel is om de structuur vast te houden.

Gaan we nu over tot het oplossen van een probleem; daarbij verandert successievelijk de totale probleemstructuur, totdat een structuur gevonden is, waaruit de oplossing logisch kan volgen. Zulke veranderingen van de structuur noemt men „omstructureeringen" (excusez le mot!).

Deze omstructureeringen kunnen zich beperken tot kleine gedeelten van het schema, bijvoorbeeld daar waar tusschen twee deelen

een nieuwe relatie gezien wordt, maar kunnen ook van zoo fundamenteele aard zijn, dat het probleem er geheel anders gaat uitzien; dat is bijvoorbeeld het geval, wanneer men na onvruchtbare pogingen in één bepaalde richting plotseling een oplossing van totaal andere aard ziet, voortvloeiende uit een tot nu toe verwaarloosd gegeven. Nu blijkt het, dat een eenmaal verworven structuur een zekere „psychische traagheid" bezit, dat wil zeggen, ziet men het probleem eenmaal vanuit een bepaald gezichtspunt en vindt men geen oplossing, dan kost het moeite het probleem volledig om te structureeren, dus vanuit een ander gezichtspunt te bekijken. Daarom is het gemak, waarmee een persoon omstructureert, op te vatten als een belangrijke component van zijn „denkvermogen" voor het beschouwde gebied.

Laat ik vóór we hier nog iets verder op ingaan een eenvoudig voorbeeld geven van een omstructureering. Dit voorbeeld is genomen uit K. Duncker [4], blz. 124. In hoofdstuk III en VIII van dit werk vindt men een uitvoerige analyse en talrijke voorbeelden. Ook zij nog gewezen op het aardige, niet wiskundige voorbeeld in L. Székely [5].

We willen het simpele feit bewijzen, dat de som van de afstanden van een punt P buiten een ellips tot de brandpunten F_1 en F_2 grooter is dan de groote as. Men trekt in de figuur PF_1 en PF_2; laat PF_2 de ellips in A snijden. Dan ziet men direct, dat men slechts behoeft te bewijzen, dat $PF_1 + PF_2 > AF_1 + AF_2$ is. Door de figuur en deze ongelijkheid geleid kan men dan als volgt verder redeneeren: ik ben dus klaar, indien ik kan bewijzen, dat $PF_1 \geqq AF_1$ en $PF_2 > AF_2$ is, waarbij het laatste triviaal is. De eerste ongelijkheid is echter niet zonder meer te bewijzen, men raakt in een impasse. Hier komt men uit door een eenvoudige, maar toch radicale omstructureering, namelijk door $PF_1 + PA > AF_1$ en $AF_2 = AF_2$ te stellen en op te tellen. We weten allen, welke onoverkomelijke moeilijkheden dergelijke omstructureeringen onze leerlingen kunnen opleveren.

Natuurlijk rijst bij U de volgende vraag: alles goed en wel met dat omstructureeren; het verschijnsel is nu beschreven, maar hoe moeten we het verklaren, hoe komt het tot stand? De gestaltepsycholoog Duncker geeft in het zooeven genoemde werk inderdaad een antwoord op die vraag. Het is onmogelijk dit hier in het kort uiteen te zetten, hoewel zijn verdere analyse zonder twijfel van groot belang is. Het probleem geheel analyseeren doet hij echter mijns inziens niet en het zou niet moeilijk vallen een aantal voorbeelden van wiskundige aard te vinden, die ook bij zijn theorie on-

verklaard blijven. Wel kan ik nog even een belangrijke slotconclusie uit zijn werk releveeren. Duncker vraagt zich af: waarin bestaat het verschil tusschen slechte en goede wiskundigen? Hij oppert twee mogelijkheden (blz. 134): 1⁰. de slechte wiskundige kan niet zoo gemakkelijk omstructureeren, omdat zijn denkmateriaal relatief onelastisch, star en daarom voor omvormingen niet plastisch genoeg is; 2⁰. het denkmateriaal is steeds als het ware doordrenkt met functies van aanschouwelijke aard; hiermede bedoelt hij, dat aan het schema elementen zijn toegevoegd, die niet tot het probleem behooren. Deze elementen worden toegevoegd — we maakten er reeds opmerkzaam op — om het schema in de geest te kunnen vasthouden. Juist in 2⁰. ziet Duncker, mijns inziens terecht, een kenmerk van de slechte wiskundigen: zij kunnen hun denkmateriaal dus niet anders overzien dan door er een geheel steigerwerk van aanschouwelijke hulpstructuren omheen te bouwen, terwijl ze de mogelijkheid missen om op een willekeurig oogenblik het verschil te zien tusschen gebouw en steigerwerk; dit gemis is dus tweeledig: 1⁰. teveel secundaire, voor het probleem onbelangrijke voorstellingselementen, 2⁰. gemis aan abstraheerend vermogen ten aanzien van die voorstellingselementen.

Misschien is dit ook een gedeeltelijke verklaring van het feit, dat de wiskundige aanleg van de vrouw gemiddeld minder is dan die van den man. Het is namelijk bekend (uit onderzoekingen van Binet, uitvoerig door anderen bevestigd), dat de beelden, dus aanschouwelijke voorstellingen, van vrouwen en kinderen vaak veel mooier en vollediger zijn dan die van mannen. Hierdoor zal abstraheeren en omstructureeren voor de vrouw moeilijker zijn. Terwijl men vroeger dacht, dat juist zeer scherpe visueele voorstellingen van groot belang waren voor het creatieve denken, komen we dus hier tot het tegenovergestelde resultaat. Dit komt ook duidelijk tot uiting in het denken van den blindspelenden schaker. Over dit onderwerp, het denken van den schaker, is juist een grondige en uitvoerige dissertatie [6] verschenen. De schrijver, A. D. de Groot, brengt daar nog weer eens duidelijk naar voren, dat een blindspeler niet een geheel bord met stukken voor zich ziet, maar in plaats daarvan een totaalschema, een totaalstructuur, waarin reeds van de vorm der stukken geabstraheerd is, waarin ook niet op een bepaald tijdstip het geheele bord is opgenomen, maar een gedeelte ervan, terwijl de dynamische mogelijkheden van de stukken juist weer wel in het schema zijn vervat. Een blindspeler kán wel min of meer een bord met stukken visueel voor zich zien, maar doet dit niet, daar dit in strijd zou zijn met zijn denkeconomie.

Verreweg het meest uitgewerkt en wellicht het belangrijkst is de uitvoerige denkpsychologische studie van Selz [8] en [9]. Gelukkig zult U niet van mij verwachten, dat ik deze studie, die ongeveer duizend bladzijden telt, poog hier uiteen te zetten. Deze complextheorie van Selz, die overigens een aantal trekken met de gestaltetheorie gemeen heeft, is dikwijls het onderwerp van misplaatste critiek geweest. De bekende psycholoog Claparède [10] geeft echter in een interessant en uitvoerig artikel o.a. een bespreking van de theorie van Selz, waarin naast veel bewondering en waardeering ook de volgende fundamenteel belangrijke critiek wordt geleverd, die hierop neerkomt: is eenmaal een probleem gegeven, dan is Selz min of meer, in elk geval meer dan anderen vóór hem, in staat een analyse van het denken en de denkmethoden te geven. Maar voor het creatieve denken is allereerst van belang het stellen van het nieuwe probleem. Hoe vinden we juist de objecten van het research-werk? Zeker, voor één opgelost probleem treden tien of honderd onopgeloste problemen in de plaats. Maar welke van die problemen, of nog veel algemeener, welke probleemgebieden zijn van belang? Is het probleem eenmaal nauwkeurig gegeven, dan bestaat daarbij reeds een structuur, maar op welke wijze ontstaan uit vage gevoelens de problemen; dit tastend zoeken, waarbij soms grof gezegd een half bewijs en een halve stelling klaar zijn, en deze elkaar wederzijds beinvloeden al naar gelang de mogelijkheden die men ziet, dit is fundamenteel bij het scheppend proces, en daarover geeft — volgens Claparède — ook de theorie van Selz geen enkel uitsluitsel.

We laten deze vraag voor wat zij is en resumeeren als volgt: bij het creatieve denkproces spelen het schema, de structuur en de mogelijke omvormingen daarvan een belangrijke rol; bij die omvormingen is essentieel het vermogen tot abstraheeren. Nog enkele andere factoren, die van belang kunnen zijn, willen we even memoreeren; ten eerste de bewustzijnscapaciteit, dat wil zeggen het vermogen om een bepaald schema bewust te overzien; hoe grooter de capaciteit is, des te meer kunnen schema's van gecompliceerde aard in hun geheel worden overzien. Door oefening zal men deze capaciteit wel kunnen uitbreiden, maar zij is toch zonder twijfel aan zekere van de persoon afhankelijke grenzen gebonden. Ten tweede de snelheid van het denken; deze snelheidsfactor is vroeger vaak overschat en kan ook tegenwoordig bij de dikwijls te veel op snelheid ingestelde intelligentietests een bron van fouten zijn. Een zekere beteekenis kan men hem echter niet ontzeggen; van twee personen, die dezelfde gedachtenreeksen doorloopen, kan de snellere

meer praesteeren. In de derde plaats is de sterkte van het geheugen ook een factor, zij het eveneens van secundair belang. Van groot belang daarentegen is het beschikken over (bewuste en onbewuste) ervaring betreffende het te bestudeeren gebied; hiertoe dient men dus in aanleg het vermogen te bezitten deze ervaring op te doen. De grootte en aard van dit vermogen zijn echter weer min of meer afhankelijk van de wijze van voorstellen en denken.

We hebben in het voorgaande een aantal voor het denken belangrijke factoren besproken en gaan vervolgens in grove trekken na, welke psychische phasen we bij het exploreeren van een nieuw probleemgebied kunnen onderscheiden. We gaan dus uit van een probleemstelling; er is een vermoeden, dat dit of dat juist of onjuist is en men wil dat onderzoeken. Dan komt het eerste stadium, een tijd van assidu, nauwgezet, bewust en doelgericht werken, waarbij de reeds vroeger vergaarde kennis en ervaring bewust of gedeeltelijk onbewust op hun bruikbaarheid worden getoetst. Ja, ook gedeeltelijk onbewust; men heeft vaak een zeker intuitief gevoel — terecht of ten onrechte, dat laten we in het midden — of een bepaalde gedachte al of niet van belang kan zijn, en men richt zich daarnaar. Zooals men in het practische leven de naam van een bekende vergeten kan zijn, terwijl men toch met min of meer groote zekerheid intuitief kan aanvoelen of er veel kans is, dat men zich de vergeten naam spoedig kan te binnen brengen, zoo wordt ook hier de uitwerking van het plan voor een groot deel door wil en gevoel bepaald. Bovendien ontstond steeds, zooals reeds gezegd, een schema, dat in vage trekken de momenteele ontwikkelingstoestand van het probleem aangeeft. Dit schema is natuurlijk niet constant, maar is in structureele ontwikkeling. Sommige deelen of eigenschappen ervan schijnen belangrijk en worden sterker gefixeerd, andere onbelangrijke stukken worden afgestooten of verschijnen in een nieuwe gedaante. De genoemde processen van abstractie en omstructureering spelen daarbij een groote rol. Vaak staan bij de probleemontwikkeling reeds direct een aantal door ervaring verkregen denkgewoonten ter beschikking. Men is door oefening vertrouwd geraakt met veel voorkomende omstructureerings- of abstractieprocessen; men heeft langzamerhand de gewoonte gekregen een bepaald soort problemen van een bepaalde kant aan te pakken; men is thuis geraakt in een bepaalde theorie. Natuurlijk mist men dit „huiselijk gevoel" bij de ontwikkeling van theorieën van fundamenteel nieuwe aard, en deze zijn daarom ook des te moeilijker.

Het is mogelijk, dat de denkende geest uitkiezend en keurend, doelgericht en toch tastend, zoo een oplossing vindt; ook kan

blijken, dat het oorspronkelijke vermoeden onjuist is of dat het noodzakelijk is het oorspronkelijke oplossings-schema door totaal andere te vervangen. Het is ook mogelijk, dat het uitgangsprobleem zich splitste in een groot aantal onderproblemen, die een volkomen afzonderlijke behandeling verdienen. Daarbij kan het gebeuren, dat het oorspronkelijke probleem als te moeilijk opgegeven wordt en men zich met een meer bescheiden doelstelling tevreden moet stellen. In elk geval wordt een niet opgelost probleem na korte of lange tijd terzijde gelegd, het bewust gericht zijn op het probleem is geëindigd, maar men geeft het nog niet op, heeft de bedoeling er later weer mee te beginnen. Hiermede is het eerste stadium geeindigd.

Het is natuurlijk mogelijk en komt veel voor, dat het probleem in een aantal phasen gelijk aan die van het eerste stadium, maar gescheiden door grootere of kleinere intervallen, opgelost of niet opgelost en opgegeven wordt. Dat levert niets nieuws. Maar het is ook mogelijk, dat het typische tweede stadium optreedt, de zoogenaamde inspiratie. We weten allen, wat hiermede bedoeld wordt; op een volkomen onverwacht oogenblik duikt plotseling een gedachte op, vergezeld van het zekere gevoel: zóó, in deze richting moet het probleem opgelost worden, dit is de reddende gedachte. Als illustratie willen we nog even het bekende voorbeeld van Poincaré noemen: Poincaré is bezig met een van zijn eerste groote onderzoekingen. Hij heeft het gevoel, dat bepaalde functies, de zoogenaamde functies van Fuchs, niet bestaan. Veertien dagen lang is hij ermee bezig; dan, in een slapelooze nacht, waarin eigenlijk ongewild ideeën in massa's komen en gaan, zich met elkaar combineeren of weer verdwijnen, bouwt hij een eerste klasse van zulke functies op. Bovendien wil hij er een uitdrukking voor vinden en wel als quotiënt van twee reeksen, in analogie met de elliptische functies; hierin slaagt hij zonder moeite. Vervolgens verlaat hij zijn woonplaats Caen om een geologische excursie mee te maken. Op het moment, dat hij in Coutances, ons welbekend door de oorlogsgebeurtenissen van enkele jaren geleden, in de bus wil stappen, komt midden in een gesprek plotseling het idee bij hem boven, dat de transformaties, gebruikt om de functies van Fuchs te definieeren, identiek zijn met die van de niet-Euclidische meetkunde. Tijd voor verificatie was er niet, maar het idee ging gepaard met het gevoel van algeheele zekerheid. Teruggekeerd in Caen verifieerde hij het resultaat, dat inderdaad juist bleek te zijn en hem dus leerde, dat er nog andere, meer algemeene klassen van Fuchsische functies bestonden, dan de aanvankelijk geconstrueerde.

Wat zijn nu de typische momenten bij deze plotselinge inspiratie of „illumination"? 1°. Het onverwachte tijdstip, dat wil zeggen; er werd op dat oogenblik en tevoren niet aan het probleem gedacht; 2°. het (al of niet juiste) gevoel van absolute zekerheid, het is als een bliksemflits: „ik heb het gezien, heel even en niet duidelijk, maar ik weet dat ik het later weer en dan duidelijker zal zien"; 3°. het feit, dat de verlossende gedachte vaak van geheel andere aard is dan de gedachten, die tot dusverre bij het probleem betrokken waren; het idee komt uit een geheel andere richting dan men verwachtte.

Is er nu een verklaring of aannemelijke beschrijving te geven van dit phenomeen „inspiratie"? Als verklaringshypothese is het aangenaam en wenschelijk het reeds eerder genoemde „onderbewuste" in te voeren — en dat doen Poincaré, Hadamard en een aantal psychologen — zoodat dus aan het inspiratiemoment een incubatieperiode voorafgaat, waarin de tijdens het eerste stadium verkregen gedachtenreeksen en geactiveerde processen hun invloed op het onderbewuste kunnen doen gelden, zonder dat dit ons ook maar een enkel oogenblik bewust behoeft te worden; analogieën in het dagelijksch leven zijn daarvoor te vinden; de naam van een bekende, die ik me twee dagen geleden maar niet kon herinneren, schiet me nu plotseling te binnen, enz.

Poincaré stelt zich dit dan zóó voor — en dit beeld wordt door Hadamard verder uitgewerkt — dat een gedachte als een afgeschoten projectiel andere gedachten in beweging zet, en zoo voort, waarbij bepaalde groepeeringen van projectielen als nieuwe ideeën geïnterpreteerd kunnen worden. Dit proces houdt niet op na het bewuste denken, maar ook onbewust gebleven psychische inhouden raken in beweging, nieuwe nog onbewuste ideeën ontstaan en krijgen daarmede de kans vroeger of later bewust te worden. Hadamard legt dan aan de hand van dit beeld uit, dat het denken tijdens het eerste stadium niet te eenzijdig gericht moet zijn, want dan treft men later te weinig psychische inhouden. Ook mag het denken niet te verspreid en verstrooid zijn, want dan zijn de impulsen niet groot genoeg; een door één hagelkorreltje getroffen eend geeft geen „inspiratie".

Hoewel ik het nog met Poincaré eens kan zijn — hij licht alleen toe aan een beeld — vind ik toch, dat Hadamard veel te ver gaat; want hij wil verklaren met zijn beeld; maken we zijn beeld exact, dan blijft er in wezen een stuk associatiepsychologie over, dat een kern van waarheid bevat, maar geen verklaring geeft en voor critiek vatbaar is, zooals we zagen.

Ook de indeeling van de verschillende typen creatieve wiskundigen volgens deze beeldspraak van Hadamard is daarmee veroordeeld, hoewel ze waarschijnlijk heuristische waarde heeft; oneerbiedig gezegd komt het hierop neer, dat het gedachtegeschut van lichter of zwaarder kaliber kan zijn, al naarmate het dieper of minder diep in het onderbewuste doordringt, terwijl men voorts moet onderscheiden tusschen projectielen met brisantwerking en dus veel spreiding, en projectielen met meer doorborende kracht, zooals pantsergranaten. Hermite is dan een stuk 40 cm-geschut. Poincaré niet, dat is een heele batterij afweergeschut tegelijk, niet zoo geweldig vèrdragend, maar met een groote spreiding; hiermede vergeleken wordt dus een middelmatige H.B.S.-leerling een proppenschieter.

Wel toont Hadamard in de loop van zijn betoog mijns inziens overtuigend aan, dat Poincaré's bekende — terminologisch zeer ongelukkige — indeeling in „logisch getinte" en „intuitief getinte" wiskundigen evenzeer onhoudbaar is, wat al dadelijk blijkt uit het feit, dat bij Poincaré's indeeling Hermite een logisch wiskundige zou zijn.

Maar laat ons terugkeeren tot de bestudeering van het inspiratiephenomeen; want een belangrijke vraag bleef nog onbeantwoord: hoe komt het, dat van alle geactiveerde onbewuste psychische inhouden juist diegene naar boven komt, juist die bewust wordt, die van belang is voor de oplossing van het probleem?

Het typisch Fransche antwoord luidt: de zin voor wetenschappelijke schoonheid. Dat deze en andere emotioneele factoren tijdens het creatieve proces een rol spelen, is wel zeker, maar om het gevoel voor wiskundige schoonheid als verklaring zonder meer voor de inspiratie te laten dienen, komt me onwetenschappelijk voor; het doet denken aan het antwoord op de oude vraag: waarom vallen alle dingen naar de aarde? Antwoord: omdat de aarde de natuurlijke plaats van alle dingen is.

Er zijn ook andere verklaringshypothesen voor de inspiratie; in de eerste plaats de rusthypothese; door vermoeidheid was men niet meer in staat de juiste gedachte te vinden; na uitgerust te zijn komt men al gauw op het goede idee. Hiermede wordt echter misschien een aantal, maar zeker niet alle gevallen van inspiratie verklaard, bijvoorbeeld niet het zooeven aangehaalde geval van Poincaré.

Ten tweede: de hypothese van het vergeten; tijdens het vorige onderzoek is men op een doodloopend spoor geraakt; slechts door vergeten wordt men ertoe gebracht een nieuwe, betere weg in te

slaan. De remming van de foutieve gedachtengang is dan min of meer opgeheven en er komt in het bewustzijn plaats voor andere methoden. Ook deze verklaring past kennelijk niet op alle feiten.

Ten derde is er de toevalshypothese. Laten we deze iets nauwkeuriger bekijken, want deze hypothese heeft de eigenaardigheid om langs de achterdeur weer binnen te komen, nadat zij er juist door de voordeur is uitgegooid. De bioloog-psycholoog Nicolle en de psycholoog Souriau waren vertegenwoordigers van deze hypothese. Hadamard zegt terecht, dat verklaring door puur toeval gelijk staat met het geven van geen verklaring. Dan kan men het geheele physische en psychische gebeuren door toeval verklaren. Natuurlijk kan het toeval in de vorm van een onvoorziene gebeurtenis een zekere rol spelen. Indien bijvoorbeeld Poincaré in plaats van in Coutances in de omnibus te stappen tegen een dame was aangeloopen, die een vossebont droeg en een boek onder de arm had met als titel „Niet-Euclidische transformaties", dan zou het wel „toevallig" zijn geweest, indien hij verzuimd had het verband tusschen zijn functies van Fuchs en de niet-Euclidische transformaties te zien. In zoo'n geval zou de ingeving voor ons veel van haar waarde verloren hebben, maar — en dat is belangrijk — het zou een ingeving blijven. Niet alleen het optreden van het een of andere idee in het bewustzijn is één inspiratie, maar het subjectieve besef op dát moment, dat het idee ook werkelijk belangrijk is; het kunnen kiezen uit de vele ideeën, dát is inspiratie. En bij dat kunnen kiezen speelt dus een aesthetisch „gevoel voor wetenschappelijke schoonheid" een zekere rol, maar deze uitdrukking is voor een verklaring veel te vaag, zooals ik reeds zeide. In ieder geval kunnen we zeggen, dat het toeval in de vorm van onberekenbare factoren steeds een evenzeer onberekenbare rol kan spelen, dus ook bij de inspiratie, maar dat men het toeval nooit als totaal-verklaring van de inspiratie mag opvatten, wat bijvoorbeeld J. Bahle [11] doet, die, voortbouwende op de denkpsychologie van Selz, het muzikale scheppen heeft onderzocht en daarbij de inspiratie verklaart door de werking van „innerlijke" toevallen.

Iets anders is, of men de inspiratie als in belangrijke mate verschillend van de omstructureering moet opvatten. Ook aan de omstructureering gaat steeds een zoogenaamde „schöpferische Pause" vooraf, waarin het denken aan de waarneming onttrokken is, waarin men peinst en waarin de phantasie rondspeelt en voor een oogenblik alles, ook het onlogische en onwaarschijnlijke, als in een droomtoestand geaccepteerd wordt, waarbij wat eerst onmogelijk scheen tot mogelijkheid omgevormd wordt. Zoo kan een inspiratie een ver-

traagde omstructureering zijn, maar of de inspiratie steeds als zoodanig opgevat mag worden, blijft een open vraag.

We keeren terug tot onze uiteenzetting betreffende de verschillende phasen van het onderzoek. Het eerste stadium bestond dus uit het voorbereidende werk; het tweede stadium geeft de inspiratie, echter voorafgegaan door een langere of kortere incubatieperiode. Over de verdere stadia kunnen we kort zijn; na de inspiratie volgt als derde stadium het controleeren en preciseeren van de verkregen resultaten, waarbij men gedwongen wordt verschillende halfbewuste voorstellingen in bewuste scherp logische gedachtengangen om te zetten; tijdens dit laatste stadium treden, zooals de praktijk uitwijst, dikwijls nog belangrijke veranderingen en vereenvoudigingen op. Typisch is, dat het werk in dit laatste stadium vaak als zeer onaangenaam wordt gevoeld, terwijl de resultaten den ontdekker niet alleen oninteressant voorkomen, maar hem zelfs met walging kunnen vervullen. „Pas na enkele maanden," zegt Hadamard, „kan ik objectief staan tegenover de waarde van mijn eigen vondsten".

Op een geheel ander belangrijk punt kan ik slechts terloops ingaan, namelijk de aard van de voorstellingen, die het denken begeleiden. Bekend is de indeeling in visueele, auditieve en motorische typen. Dit is evenwel slechts een eerste en niet altijd gelukkige indeeling; er zijn bijvoorbeeld bij de visueele typen verschillen, die van fundamenteele aard zijn; zoo ziet iemand van het zoogenaamde typographisch visueele type, wanneer hem gevraagd wordt wat hij zich voorstelt bij het woord „hond", het woord hond in letters visueel voor zich. D. Birkhoff, zooals U weet een groot Amerikaansch mathematicus, ziet bij zijn gedachtengangen de gebruikte algebraïsche symbolen visueel voor zich; volgens Hadamard is dit een uitzondering en bezitten de meeste wiskundigen vage, min of meer abstracte visueele voorstellingen.

Een tweede korte opmerking wil ik maken over de wiskundige aanleg; deze is uitvoerig door G. Révész [12], [13], [14] behandeld. Hij komt in deze werken tot de conclusie, dat er één ongedeelde, specifiek wiskundige begaafdheidsvorm bestaat, dat wil zeggen één ondeelbaar onmisbaar creatief vermogen op wiskundig gebied, terwijl de praestatieverschillen in de diverse onderdeelen van de wiskunde veroorzaakt zouden worden door de verschillende richtingen, waarin zich de begaafdheidsvorm kan ontwikkelen onder de invloed van speciale interessen en een bepaalde instelling van denken en voorstellen. De mogelijkheid tot een bepaalde instelling in denken en voorstellen moet echter zonder twijfel ten deele in aan-

leg aanwezig zijn, zoodat we, indien we dit in rekening brengen, mijns inziens in principe de wiskundigen toch wèl kunnen verdeelen in verschillende typen, waarbij de aanleg van fundamenteel verschillende aard kan zijn. Dit geeft Révész ook toe, maar de aanleg betreffende de structuur van denken en voorstellen rekent hij niet tot de specifiek mathematische begaafdheidsvorm, omdat de eerste ook op tal van andere gebieden tot uitdrukking komt. Natuurlijk kan men dit doen, maar zoo voort redeneerende en analyseerende zou tenslotte de speciale mathematische begaafdheidsvorm wel eens een leege verzameling kunnen worden. Òf het probleem van de ongedeelde wiskundige begaafdheidsvorm kan zoodoende een schijnprobleem worden, òf de oplossing van het probleem een schijnoplossing.

Ik wil eindigen met de hoop uit te spreken, dat aan de hier aangeroerde kwesties een diepgaand onderzoek wordt gewijd; tot dusverre is dit bij mijn weten nergens geschied. Wil dit slagen, dan dient er een groot aantal uitvoerige experimenten aan ten grondslag te liggen, waarbij de proefpersonen liefst creatieve wiskundigen van wereldnaam moeten zijn, terwijl onder de proefleiders zoowel psychologen als wiskundigen moeten voorkomen. Aan de proefpersonen moeten niet alleen zorgvuldig geselecteerde problemen ter oplossing worden gegeven, maar ook dient men de ontwikkeling van nieuwe probleemstellingen uit een gegeven stelling bij de proefpersonen na te gaan, daar juist het construeeren van deze nieuwe problemen bij het creatieve proces van primair belang is. Daar Nederland tegenwoordig over een aantal (minstens zes) wiskundige hoogleeraren van wereldnaam beschikt, is het in beginsel mogelijk, dat deze onderzoekingen geheel of grootendeels in ons land plaats vinden.

LITTERATUUR.

[1] J. Hadamard, The psychology of invention in the mathematical field, Princeton University Press (1945).
[2] Ed. Claparède en Flournoy, L'enseignement mathématique 4 (1902), 6 (1904).
[3] H. Poincaré, Science et méthode; La valeur de la Science.
[4] K. Duncker, Zur Psychologie des produktiven Denkens, Berlin, Springer (1935).
[5] L. Székely, Zur Topologie des Einfalls, Acta Psychologica V (1941), blz. 79—96.
[6] A. D. de Groot, Het denken van den schaker, dissertatie, Amsterdam (1946).
[7] A. D. de Groot, Begaafdheid voor het schaakspel, Alg. N. T. v. Wijsbeg. en Psych. **32** (1938).

[8] O. Selz, Über die Gesetze des geordneten Denkverlaufs, eine experimentelle Untersuchung, erster Teil, Stuttgart (1913).
[9] O. Selz, Zur Psychologie des produktiven Denkens und des Irrtums, Bonn (1922).
[10] Ed. Claparède, La genèse de l'hypothèse, Archives de Psych. **24** (1934), blz. 1—155.
[11] J. Bahle, Eingebung und Tat im musikalischen Schaffen, Leipzig (1939).
[12] G. Révész, The indivisibility of mathematical talent, Acta Psych. V (1941).
[13] G. Révész, De ongedeeldheid der begaafdheidsvormen, Alg. N. T. v. Wijsbeg. en Psych. **32** (1938).
[14] G. Révész, Creatieve begaafdheid, Servire, Den Haag (1946).
[15] H. Fehr, Enquête sur la méthode de travail des mathématiciens; l'enseignement math. **8** (1905).
[16] H. C. J. Duyker, Methodologische grondslagen van het onderzoek der begaafdheid, Alg. N. T. v. Wijsbeg. en Psych. **32** (1938).
[17] G. Polya, Wie sucht man die Lösung mathematischer Aufgaben? Acta Psych. IV (1939), 113—170.
[18] G. Polya, How to solve it? Princeton University Press (1945).
[19] A. Wenzl, Theorie der Begabung, Leipzig (1934).
[20] K. Cuypers, Het aankweken van het wiskundig denken, Antwerpen, De Sikkel (1940).

MOEILIJKHEDEN VAN LEERLINGEN BIJ HET MEETKUNDE-ONDERWIJS

door

Dr. L. N. H. BUNT.

1. Bij het onderzoeken van de moeilijkheden, die onze leerlingen kunnen ontmoeten bij het gangbare meetkundeonderwijs, wil ik mij beperken tot die van een bepaalde soort. Ik zal niet spreken over moeilijkheden, die uitsluitend liggen op het gebied van het geheugen, en die daarin tot uiting komen, dat leerlingen er moeite mee hebben om zekere dingen geruimen tijd te onthouden of om een lange redenering te overzien; niet over moeilijkheden, die voortspruiten uit een zeker ontmoedigd zijn, uit vrees, dat het niet lukken zal, uit gejaagdheid, weinig geïnteresseerd zijn, een gebrekkig voorstellings- of concentratievermogen, het verschijnsel van de zgn. perseveratie bij het zoeken in een verkeerde richting, enz.; maar ik zal mij beperken tot die moeilijkheden die liggen op het terrein van het inzicht; moeilijkheden dus die zich in de stof zelf bevinden en die voor een leerling een belemmering kunnen vormen om door redenering zijn doel te bereiken, bij het zoeken naar de oplossing van een probleem. Wanneer ik in deze bijdrage de uitdrukking „redeneren" bezig dan zal ik het daarbij vrijwel uitsluitend hebben over gedachtengangen, die men wel aanduidt als „regressieve" redeneringen; de lezer zal echter ongetwijfeld inzien, dat veel van onze opmerkingen m.m. kunnen worden toegepast op de zogenaamde „progressieve" redeneervorm.

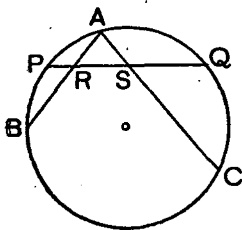


Fig. 1.

Laat ik beginnen met een voorbeeld te geven van een vraagstuk, waarvan de oplossing geheel door redenering kan worden gevonden. In de cirkel van fig. 1 zijn de koorden AB en AC getrokken; P is het midden van boog AB, Q dat van boog AC; bewijs dat AR = AS. Wanneer een leerling erin getraind is om regressief te redeneren, d.w.z. uit te gaan van hetgeen er moet worden bewezen en terug te redeneren net zo lang tot hij aanlandt bij iets wat bekend is, dan zal hij als volgt te werk gaan: „we moeten bewijzen, dat AR = AS is; over welke middelen beschik ik om aan te tonen dat twee lijnstukken gelijk zijn?" Hij zal nu

misschien onmiddellijk zien, dat hij moet letten op de hoeken bij R en S; van dit onmiddellijk zien wil ik nu echter geen gebruik maken, en onderstellen, dat hij het rijtje „middelen om te bewijzen dat twee lijnstukken gelijk zijn" afwerkt en daarbij òf direct het goede middel: bewijzen, dat de hoeken bij R en S gelijk zijn, gaat proberen, òf eerst bij dat middel terecht komt, nadat hij een of meer andere: congruentie, overstaande zijden van een parallelogram, enz. op hun toepasbaarheid heeft onderzocht. Hij moet dus nu verder een ander vraagstuk oplossen: te bewijzen, dat de hoeken bij R en S gelijk zijn; hij gaat weer zijn rijtje middelen, thans om te bewijzen dat twee hoeken gelijk zijn, na: congruentie, hoeken bij evenwijdige lijnen, enz., en hij komt terecht bij het middel: werken met de bogen, waarop de hoeken staan. Hij tracht nu verder te bewijzen, dat boog QA + boog PB gelijk is een boog QC + boog PA, en constateert dat dit zo is op grond van het gegeven. Inderdaad, wanneer een leerling erin getraind is om op een dergelijke manier zijn vraagstukken aan te pakken, steeds zich afvragend: over welke middelen beschik ik om iets bepaalds te bewijzen, dan speelt bij deze gang van zaken zijn intuïtie geen merkbare rol. Hij doet alles zo, dat hij gebruik maakt van vroeger behandelde dingen en steunt dus alleen op zijn geheugen en op zijn vermogen om op een ordelijke wijze te redeneren.

2. Wij geven onze leerlingen veel van dergelijke vraagstukken op, die uitsluitend zijn te vinden door hun redeneervermogen te gebruiken, en ik zou zeggen: dat zijn bij uitstek geschikte vraagstukken. Dit betekent volstrekt niet, dat ik andere opgaven, waarvan we niet kunnen zeggen: deze *moet* een leerling kunnen vinden door zijn redeneervermogen te gebruiken, daarom niet geschikt zou achten. Bij zeer veel vraagstukken komt er tijdens het zoeken van de oplossing een ogenblik, waarop de redenering stokt, omdat er geen bekend middel bij de hand is, dat op het onderhavige geval kan worden toegepast. Bijv.: In fig. 2 is gegeven: $\angle B = \angle C = 90°$, $AB > AC$; te bewijzen: $SB < SC$.

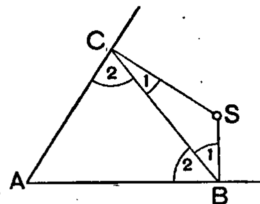


Fig. 2.

We onderstellen dat een leerling weer terug redeneert. „Over welke middelen beschik ik om te bewijzen, dat een lijnstuk kleiner is dan een ander lijnstuk." Hij blijkt daarvoor meer één middel te hebben gehad: als in een driehoek twee hoeken ongelijk zijn, is de zijde tegenover de kleinste hoek kleiner dan de zijde tegenover de grootste. „Is er een driehoek te vinden, waarvan SB en SC zijden

zijn. Antwoord: $\triangle$ BSC. Ik trek dus de hulplijn BC. Nu moet ik nog bewijzen: $\angle C_1 < \angle B_1$. Over welke middelen beschik ik om te bewijzen, dat een hoek kleiner is dan een andere hoek? Antwoord: (bijv.) twee middelen; 1e: een buitenhoek van een driehoek is groter dan elk der niet aanliggende binnenhoeken, 2e: als in een driehoek twee zijden ongelijk zijn, is de hoek tegenover de kleinste zijde kleiner dan de hoek tegenover de grootste. Noch het eerste, noch het tweede middel komt hier in aanmerking." Wanneer onze leerling nu halsstarrig blijft vasthouden aan middelen, die hij reeds expliciet gehad heeft en welke kunnen dienen om te bewijzen, dat twee hoeken ongelijk zijn, zal hij er niet uitkomen. Hij zal nu namelijk moeten *zien,* dat de hoeken bij C en B recht zijn, dat hieruit volgt dat die hoeken gelijk zijn, en dat we in plaats van te bewijzen dat $\angle C_1$ kleiner is dan $\angle B_1$ ook zullen kunnen bewijzen, dat het complement C_2 groter is dan het complement B_2. Had hij van te voren de stelling gehad: „wanneer van een hoek het complement groter is dan het complement van een andere hoek, is de eerste hoek kleiner dan de tweede", dan had hij zuiver door redenering zijn weg aldus kunnen vervolgen: „zijn de complementen van de hoeken C_1 en B_1 ook in de figuur aanwezig, m.a.w. zijn er bijv. rechte hoeken, waarvan de hoeken C_1 en B_1 deel uitmaken? Antwoord: ja, de hoeken C_2 en B_2. Kan ik bewijzen, dat $\angle C_2$ groter is dan $\angle B_2$? enz. (In sommige meetkundeboeken komt de stelling voor: „als van twee hoeken de complementen gelijk zijn, zijn die hoeken zelf gelijk." Deze stelling is daar vermoedelijk uitsluitend met de bedoeling opgenoemd om de leerling in staat te stellen bij toekomstige opgaven, waarin verlangd wordt de gelijkheid van twee hoeken te bewijzen, het bewijs op een eenvoudige manier op te schrijven, om daar dus te kunnen zeggen: de onderhavige twee hoeken zijn gelijk, omdat hun complementen gelijk zijn. Overigens werkt het tweetal stellingen: „gelijke hoeken hebben gelijke complementen," en: „als van twee hoeken de complementen gelijk zijn, zijn ze zelf gelijk," maar verwarrend als ze beide gegeven worden; een leerling weet dikwijls niet op welke van die twee stellingen zijn redenering berust, en daarom lijkt het mij beter om de tweede stelling achterwege te laten. Wanneer het bij de gangbare vraagstukken dikwijls voorkwam, dat bewezen moest worden, dat een hoek kleiner is dan een andere hoek, zouden sommige schoolboeken misschien ook de stelling gaan vermelden: „een hoek is kleiner dan een andere hoek als het complement van de eerste groter is dan dat van de tweede.")

3. We zien dus hier een voorbeeld van een redenering, waarvan

we niet kunnen zeggen, dat een leerling die beslist *moet* kunnen vinden; hij moet hier namelijk iets intuïtief zien. In het eerste voorbeeld was dit niet het geval, en dergelijke opgaven, die een leerling geheel door redenering kan oplossen zonder dat hij een beroep behoeft te doen op zijn intuïtie, zullen we eerder kunnen verwachten in een stadium, waarin zijn hoeveelheid ervaringsmateriaal reeds tamelijk uitgebreid is, dan in het beginstadium van het meetkundeonderwijs. Voor ons lijkt het meestal, ook in de eerste meetkundelessen, dat een vraagstuk eigenlijk geheel door redenering te vinden moet zijn, en dikwijls is dat ook zo. Maar er zijn ook plaatsen, waar de intuïtie een rol speelt zonder dat we dit gemakkelijk opmerken. Dit komt dan, doordat wij zo'n grote voorraad ervaringsmateriaal tot onze beschikking hebben, dat wij niet meer die plaatsen zien, die wij overbruggen door middel van onze ervaring, maar waar een beginner nog geheel op eigen krachten is aangewezen en dus zekere dingen of relaties volkomen origineel zal moeten zien. Om eens een enkele van die plaatsen op te zoeken willen wij een ogenblik onderstellen, dat wij te maken hebben met een denkbeeldige leerling, die nog maar net begonnen is met zijn meetkunde, en die dus een zeer beperkte hoeveelheid ervaringsmateriaal bezit, maar die een voortreffelijk vermogen heeft om door een regressieve redenering een probleem aan te pakken. Natuurlijk bestaat zo'n leerling niet, want het vermogen om regressief te redeneren krijgen onze leerlingen juist door zich te oefenen in het werken met meetkundige begrippen, en die oefening, onderstellen we nu, heeft onze denkbeeldige leerling niet gehad. We zullen aannemen, dat hij van de meetkunde alleen gehad heeft de definitie van gestrekte hoek, van een rechte hoek (helft van een gestrekte), wat men verstaat onder gelijke hoeken, en dat het feit, dat een hoek A de helft is van een hoek B, betekent: verdubbelt men ∠ A, dan ontstaat er een hoek gelijk aan ∠ B; we veronderstellen verder dat hij, gewapend met die kennis, de oplossing van het volgende ingewikkelde probleem gaat zoeken (fig. 3): gegeven ADB is een rechte lijn; ∠ α is een rechte hoek; te bewijzen ∠ β is een rechte hoek. Een normale leerling maakt dit vraagstuk als volgt: „∠ ADB is een gestrekte hoek; ∠ α is recht, wat er overblijft is dus ook recht." Er is moeilijk een leerling te bedenken, die dit vraagstuk niet zou kunnen maken, of liever gezegd, iedere leerling zal het onzinnig vinden om zo iets nog te gaan beredeneren. Het is ons

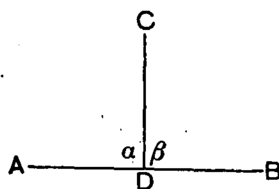


Fig. 3.

er nu echter om begonnen om te onderzoeken, of een leerling, gesteld dat hij geschoold is in het houden van regressieve redeneringen, nu door een dergelijke redenering het verlangde bewijs zou kunnen vinden zonder ook maar op enigerlei wijze gebruik te maken van zijn intuïtie. Ons logisch genie zou dan als volgt moeten denken: „ik moet bewijzen, dat ∠ β recht is. Wat betekent dit? (het zich stellen van deze vraag behoort tot het machtig zijn van de kunst van het „redeneren"). Antwoord: dat ∠ β helft is van een gestrekte hoek. Welke gestrekte hoek? Antwoord: ∠ ADB. Ik moet dus bewijzen, dat ∠ β de helft is van ∠ ADB. Wat betekent dit? Dit betekent, dat wanneer ik een hoek tegen ∠ β aanzet, die even groot is, de gestrekte hoek ADB ontstaat. Welke hoek zit er in de figuur al tegen ∠ β, die met ∠ β de gestrekte hoek ADB vormt? Antwoord: ∠ α. Ik moet dus bewijzen, dat ∠ α gelijk is aan ∠ β. Wat weet ik van ∠ α? Antwoord: ∠ α is recht. Wat betekent dit? Antwoord: ∠ α is de helft van een gestrekte hoek. Welke gestrekte hoek? Antwoord: ∠ ADB. Ik weet dus, dat ∠ α de helft is van ∠ ADB. Wat betekent dit? Antwoord: wanneer ik tegen ∠ α een hoek plaats, die even groot is, ontstaat de gestrekte hoek ADB. Welke hoek zit er in de figuur al tegen ∠ α, die met ∠ α de gestrekte hoek ADB vormt? Antwoord: ∠ β. Dus is ∠ β = ∠ α, hetgeen ik nog moest bewijzen." Op het eerste gezicht zal men geneigd zijn te zeggen: deze redenering heeft zich zonder enig beroep te doen op de intuïtie voltrokken. Laten we echter eens wat nauwkeuriger toezien. Onze leerling merkt op te moeten bewijzen, dat ∠ β de helft is van een gestrekte hoek, en vervolgt dan: welke gestrekte hoek? Antwoord: ∠ ADB. Dit is evenwel niet volkomen van zelf sprekend, d.w.z. dit is niet een dwingend gevolg van zijn weten omtrent middelen, die hij vroeger heeft gehad en nu gaat toepassen; immers, hij kon ook een willekeurige rechte op zijn papier gaan trekken en nu proberen te bewijzen, dat ∠ β de helft is van de gestrekte hoek, die aldus ontstaat. Maar dat doet hij niet, hij richt zijn aandacht uitsluitend op de figuur, waarmee hij werkt. Ja, hij gaat intuïtief zelfs uitsluitend kijken naar dat gedeelte van de figuur, dat zich aan de bovenkant van de lijn ADB bevindt, omdat hij onmiddellijk ziet, dat de onderkant geen aanknopingspunt biedt voor zijn redenering (we zullen tenminste maar onderstellen, dat hij er niet toe overgaat om CD door D heen te verlengen). Vervolgens merkt hij op, dat hij, om te bewijzen, dat ∠ β de helft is van ∠ ADB, een hoek tegen hoek β zal moeten plaatsen, die even groot is, en dan zal moeten laten zien, dat de gestrekte hoek ADB ontstaat. Dit laatste doet hij evenwel niet, hij merkt omgekeerd op, dat ∠ ADB ontstaat door

$\angle \alpha$ tegen $\angle \beta$ te plaatsen. Hij ziet dus, dat $\angle \alpha$ er is, en dat deze de hoek zal moeten worden, welke gelijk is aan $\angle \beta$. Ook dit is een gedachtensprong, die hem van de rechte weg van zijn redenering doet afwijken. Hij heeft dus tot nu toe reeds tweemaal een, zij het bijna onmerkbaar, beroep gedaan op zijn intuïtie. Ook in het verdere verloop van de redenering zal, bij nauwkeurige beschouwing, dit verschijnsel zich nog twee keer blijken voor te doen.

4. Het is duidelijk, dat ik deze uitvoerige uiteenzetting niet heb gegeven om te laten zien, met welke moeilijkheden onze leerlingen hebben te kampen. Want een leerling doet het niet zo, zou het zelfs onmogelijk op die manier kunnen doen. Het is slechts mijn bedoeling om te laten zien, dat een redenering de schijn kan hebben van volkomen te verlopen volgens cliché-methoden, en niettemin intuïtieve elementen kan bevatten. Nu is dit dus een volkomen theoretische constructie, die hoofdzakelijk moet dienen om duidelijk te maken, in welke zin ik de term „intuïtie" hier wil gebruiken; wij willen ons thans echter wenden tot moeilijkheden, zoals die door onze leerlingen zelf in de practijk gesignaleerd worden. Ik voelde dikwijls in de klas de neiging opkomen, om een bepaalde leerling te vragen: wat was nu eigenlijk de moeilijkheid, die veroorzaakte dat je mijn uitlegging niet begreep of dat je het vraagstuk niet kon maken? En wanneer ik een onbevredigend resultaat had met een opgegeven repetitievraagstuk zou ik het liefst mijn leerlingen stuk voor stuk onder vier ogen genomen hebben en hun die zelfde vraag gesteld hebben. Dit is natuurlijk onmogelijk bij een weektaak van 30 uur en bij klassen met 30 leerlingen. Evenwel heb ik mij in zulke gevallen wel beholpen door, wanneer ik zo'n repetitievraagstuk, dat door de meesten lastig werd gevonden, in de volgende les in de klas had besproken, mijn leerlingen een stuk papier voor zich te laten nemen en te laten opschrijven wat voor hen nu de bijzondere moeilijkheid was. Ik deed dit bijv. met het volgende vraagstuk (fig. 4).

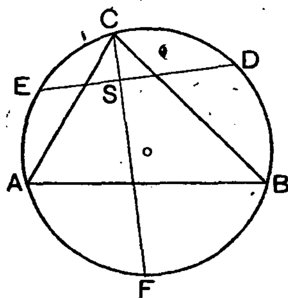


Fig. 4.

Gegeven: boog DB = boog DC, boog EC = boog EA,
boog FA = boog FB.

Te bewijzen: $\angle$ S = 90°.

Ik gaf hierbij, omdat ik dit in deze klas met veel oorlogsmolest gewenst achtte, de volgende aanwijzing: als er sprake is van een hoek, waarvan het hoekpunt binnen een cirkel ligt, is het dikwijls

practisch om met bogen te werken. Bij het teruggeven van het proefwerk besprak ik dit vraagstuk en stelde daarna de vraag: wat is hier eigenlijk de moeilijkheid? Ik kreeg, schriftelijk, verschillende antwoorden, waarvan ik hier de voornaamste zal weergeven.

a. „om bg EF te verdelen in twee delen: bg EA en bg AF."

b. „het moeilijke van dit vraagstuk is het zien, dat bg CD = ½ bg CB, bg EA = ½ bg AC en bg AF = ½ bg AB is."

Eén schrijft: „je denkt, dat het gegeven alleen nodig is om de figuur te krijgen, en denkt bij het bewijs niet meer aan het gegeven, in dit geval de gelijkheid van de verschillende bogen."

c. „moeilijkheid is, dat je kunt zeggen:

½ bg AC + ½ bg BC + ½ bg AB = ½ ⊙."

d. „uit te vinden, dat juist drie *verschillende* helften in de rechte hoek voorkomen."

e. „de moeilijkheid is, dat bg CD + bg EA + bg AF gelijk is aan de halve cirkel."

f. „om direct te zien, dat bg CD + bg EF = ½ ⊙."

g. „je wordt door de driehoek ABC in de war gebracht en probeert die bij het bewijs te gebruiken, terwijl hij net zo goed weggelaten kon zijn." Dit is een verstandige opmerking; merkwaardigerwijs is deze afkomstig van dezelfde leerling als de tweede opmerking onder *b*.

Uit deze opsomming blijkt ten eerste, dat leerlingen er dikwijls wel, maar niet altijd, in slagen om zich zelf duidelijk te maken waarin voor hen de moeilijkheid bestaat. De antwoorden *a, b, c* en *d* zijn in dit opzicht verwonderlijk scherp. Maar de onder *e* genoemde moeilijkheid is niet duidelijk: men weet niet of hier de moeilijkheid voortspruit uit het onder *b* of uit het onder *c* genoemde. En a fortiori is hetgeen onder *f* genoemd wordt niet duidelijk: hier kan de moeilijkheid zitten in het onder *a, b* of *c* genoemde.

En verder ziet men, dat wat als moeilijkheid wordt aangeduid, veelal een zelfde oorzaak heeft. Deze wordt het duidelijkst onder *a* tot uitdrukking gebracht; daar is er sprake van, dat bij EF moet worden opgevat als te bestaan uit twee stukken, het geheel van die boog moet in een bepaalde structuur worden gezien nl. als te zijn opgebouwd uit twee andere bogen. Hier vinden we een gemeenschappelijke grondtrek van veel moeilijkheden: bepaalde delen van de figuur moeten onder een nieuw gezichtspunt worden gezien, een boog moet worden opgevat als een som van twee andere bogen, bogen moeten worden gezien als helften van andere bogen en vervolgens als helften van verschillende bogen. En dat is bij ieder zoeken van de oplossing van een vraagstuk het geval; steeds moet

een figuur of een deel van een figuur vanuit een nieuw gezichtspunt worden bekeken, hij moet in gedachten in zekere zin worden omgevormd, onder een andere gezichtshoek worden gezien, op een andere manier georganiseerd worden gedacht, de „structuur" ervan moet anders worden. Ik gebruik hier een terminologie, die in het bijzonder gebezigd wordt door de vertegenwoordigers van de zogenaamde gestaltepsychologie. Niet alleen is dat het geval, wanneer men zoekt naar het bewijs van een stelling, maar bij al dergelijke denkmoeilijkheden wijzen zij er op, dat het er altijd weer op aan komt om het denkmateriaal: de gegevens of datgene wat men wil beredeneren, in een nieuw licht te zien, in een andere structuur dan tot nog toe. En wanneer het niet lukt om een oplossing te vinden, dan zit hem dat dikwijls hierin, dat men die nieuwe structuur niet vinden kan, doordat er op een of andere manier belemmeringen in de weg zitten.

De lezer kent waarschijnlijk die puzzle, waarbij de opgave luidt: trek een gebroken lijn door de 9 punten van fig. 5, maar zo, dat deze lijn slechts uit 4 stukken bestaat. Men is dan onwillekeurig geneigd om die 4 lijnstukken te willen trekken binnen het vierkant gevormd door de 9 punten, met inbegrip van de rand; men ziet deze opgave onder het gezichtspunt: een lijn trekken binnen het vierkant. Wanneer men zich daarvan een keer weet los te maken is de oplossing niet moeilijk te vinden.

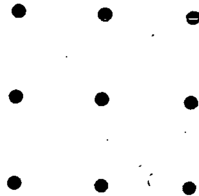


Fig. 5.

Sprekende over de moeilijkheden, die zich voordoen bij het zoeken naar de oplossing van een meetkundevraagstuk, kan men ongetwijfeld zeggen, dat er zekere betrekkingen tussen de delen van de figuur moeten worden opgemerkt, gelijkheid van bogen, van hoeken of van lijnstukken, congruentie van driehoeken, evenwijdigheid van lijnen, enz. Het is dikwijls echter voordeliger om zich te bedienen van de uitdrukkingswijze van de gestaltepsychologen en te zeggen dat men de figuur in een andere structuur moet zien. Dikwijls geeft dit een aanzienlijke bekorting in de manier van uitdrukken. Wanneer ik spreek van een driehoek ABC met een transversaal PQR, dan bedoel ik onbewust daarmee een heel complex van incidentiebetrekkingen en tussenrelaties: P ligt op BC, Q ligt tussen A en C, enz.; het is echter veel eenvoudiger om te spreken van een driehoek met een transversaal. Nu zal het ook voor ons betoog practisch blijken te zijn om ons verder te bedienen van de boven beschreven uitdrukkingswijze, waarbij we dus zeggen, dat een zekere figuur een structuurverandering moet ondergaan of zelfs geheel ontleed

moet worden, gedestructureerd zouden we geneigd zijn te zeggen, alleen moeten we er dan om denken, dat ook bij een volkomen in stukken ontleden van een figuur toch altijd nog de delen als op een bepaalde manier bij elkaar behorend zullen moeten worden opgevat, zodat van een volledig afwezig zijn van enige structuur natuurlijk niet kan worden gesproken. Waar het hier dus vooral om gaat is, dat men niet uitsluitend let op zekere afzonderlijke relaties tussen bepaalde elementen van de figuur, maar dat men oog heeft voor de totaliteit van de hele figuur of van een belangrijk complex daaruit. Men bewijst bijv. de stelling, dat in een rechthoekige driehoek de zwaartelijn naar de hypotenusa gelijk is aan de helft hiervan, het eenvoudigst door de driehoek aan te vullen tot een rechthoek; een leerling, die er in slaagt om dit te zien, vindt onmiddellijk het bewijs.

5. Nu zal aanstonds blijken, dat het ons niet behoeft te verwonderen, wanneer de analyse van een willekeurig vraagstuk één reeks van structuurveranderingen vormt. Schrijven we het bewijs van een stelling in de gangbare ordelijke vorm op, uitgaande van de gegevens en terechtkomende bij hetgeen te bewijzen is, dan is het weliswaar niet gebruikelijk om elk onderdeel van deze reeks van deducties in streng syllogistische vorm weer te geven; in het bijzonder pleegt men meestal de major weg te laten, omdat het geoefend denken hieraan geen behoefte heeft. Maar voluit geschreven zouden vele syllogismen, aan een voorbeeld toegelicht, de volgende vorm hebben:

alle driehoeken met twee gelijke hoeken zijn gelijkbenig
△ ABC heeft twee gelijke hoeken
―――――――――――――――――――
△ ABC is gelijkbenig.

Deze syllogismen zijn van de modus Barbara; en volgens een bekende opvatting zijn dit niet meer dan nodeloze herhalingen; hoogstens geven ze een definitie van het begrip „klasse", of van „alle". Maar hiertegenover valt op te merken, dat wanneer ik op een bepaald moment bedenk, dat alle driehoeken met twee gelijke hoeken gelijkbenig zijn, dit volstrekt niet impliceert, dat ik in mijn bewustzijn het oordeel present heb: „de driehoek ABC is gelijkbenig". Wertheimer merkt op[1]) naar aanleiding van het syllogisme van „dem guten alten Cajus":

alle mensen zijn sterfelijk
Cajus is een mens
――――――――――――
Cajus is sterfelijk,

[1]) M. Wertheimer, Ueber Schluszprozesse in produktiven Denken; in: Drei Abhandlungen zur Gestalttheorie, Erlangen 1925.

dat men vooraf niet behoeft te weten, dat Cajus sterfelijk is, om te kunnen beweren, dat alle mensen dit zijn. Dit zou wel het geval zijn wanneer, psychologisch gesproken, iedere term steeds dezelfde „waarde" behield. Er is echter voortgang in het denken, omdat de middenterm „mens" in major en minor verbonden voorkomt met twee verschillende termen en in die twee verbindingen een verschillende functie heeft. Ik bezie „de mens" onder een ander gezichtspunt, wanneer ik denk aan de sterfelijkheid van de mensen, dan wanneer ik denk aan het mens zijn van Cajus.

Waar nu de redenering in zijn syllogistische vorm, in de richting onderstelde → gestelde, reeds een aanhoudende structuurverandering vereist, is het te begrijpen, dat dit zeker het geval zal moeten zijn bij de redenering in zijn regressieve vorm, d.w.z. uitgaande van hetgeen bewezen moet worden en waarbij alles nog tastenderwijs moet worden gezocht.

6. Nu hebben deze structuurveranderingen niet allemaal dezelfde graad van moeilijkheid. Wanneer in de figuur zich een vierhoek met gelijke zijden en rechte hoeken bevindt, wordt deze vierhoek in de regel gemakkelijk herkend als een vierkant. Maar een onderdeel van een figuur wordt niet altijd gemakkelijk herkend als gelijkbenige driehoek, wanneer de benen van deze laatste niet de gebruikelijke stand hebben. De psychologen van de genoemde school hebben zich met deze kwesties beziggehouden en zich de vraag gesteld: wat is de typische verschijningsvorm van deze critieke aanschouwelijke eigenschappen, die moeilijkheden bij het herkennen plegen te veroorzaken? Men kan daarbij enkele soorten van moeilijkheden onderscheiden. In de eerste plaats die, welke daaruit voortspruiten, dat men een zekere figuur moet herkennen in een andere stand dan waarin deze oorspronkelijk is ingevoerd. We stellen ons lichamen en figuren veelal voor in een zeer bijzondere stand, en wel bijzonder t.o. van de richtingen horizontaal en verticaal. Een driehoek wordt altijd getekend met zijn basis horizontaal, een parallelogram met een van de lange zijden horizontaal en liefst met de andere evenwijdige zijden naar rechts hellend. Een trapezium staat altijd op zijn langste evenwijdige zijde, een gelijkbenige driehoek altijd op die ene zijde, die niet gelijk is aan een der andere, een halve cirkel altijd met de begrenzende middellijn horizontaal; de figuur van twee evenwijdige lijnen gesneden door een derde altijd zo, dat of de snijlijn, of de evenwijdige lijnen zelf horizontaal lopen; en zo kan men doorgaan [1]). In de practijk van het oplossen

[1]) Vgl. G. Mannoury, Woord en Gedachte (Groningen, Noordhoff, 1931) 27.

van vraagstukken of het bewijzen van stellingen uit de theorie is het natuurlijk uitzondering, wanneer deze figuren in die zelfde stand zullen voorkomen. Het spreekt vanzelf, dat we een gelijkbenige driehoek in de gebruikelijke ons vertrouwde stand tekenen wanneer we er een stelling over gaan bewijzen; maar als in een vraagstuk een zekere driehoek als gelijkbenig moet worden gezien, is het uitzondering, wanneer deze driehoek juist die geprefereerde stand inneemt. Nu is het voor het meetkundig denken van onze leerlingen noodzakelijk, dat dit begeleid wordt door een zeker zich voorstellen van figuren, en het is gewenst, dat die begeleiding van het denken door de voorstellingen op zich zelf geen extra belasting van het denken vormt. Integendeel, de bedoeling ervan is juist, dat het denken erdoor zal worden vergemakkelijkt, en dus moeten wij ervoor zorgen, dat door het voorstellen van de figuren ook inderdaad een vergemakkelijking van het denken optreedt. Die bijzondere standen mogen dus geen rem zijn op de voortgang van het denken en het is daarom gewenst dat onze leerlingen tijdig met die andere standen kennismaken, d.w.z. voor er een beroep wordt gedaan op hun vermogens in dit opzicht.

7. Een tweede soort moeilijkheden houdt verband met een verschijnsel, dat de lezer welbekend is, nl. dat men sommige figuren op twee verschillende manieren kan opvatten, eerst zo, dat een bepaald gedeelte in relief wordt gezien t.o. van de rest van de figuur, en daarna zo dat juist die rest naar voren komt vergelijken bij het eerste gedeelte. Men kan dat verschijnsel hebben bij het beschouwen van een getekende kubus, als de tekening het gebrek vertoont, dat de onzichtbare ribben niet gestippeld zijn; of ook in een figuur, die op een schematische manier een trap voorstelt, kan men soms de ene keer de treden naar voren zien springen en de andere keer naar achteren. Maar ook in sommige vlakke figuren kan men dit verschijnsel zien optreden. Men zie fig. 6; als men deze figuur even beschouwt, ziet men de ene keer het kruis, waarvan de armen horizontaal en verticaal staan, naar voren komen, de andere keer het kruis, waarvan de armen schuin staan. Bij dit verschijnsel spreekt men van de tegenstelling: figuur-achtergrond. Dergelijke figuren hebben dus een betrekkelijk geringe stabiliteit, waardoor de persoonlijke opvatting van de beschouwer een meer beslissende rol kan spelen dan in het normale geval. Op sommige momenten, wanneer men de

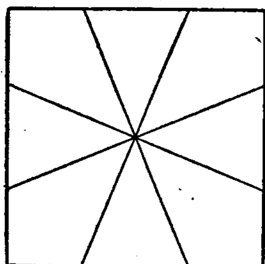


Fig. 6.

figuur bekijkt, verwisselen de rollen van figuur en achtergrond, rollen, die inderdaad verschillend zijn. De figuur heeft een zekere individualiteit, vertegenwoordigt een zekere eenheid; hij onderscheidt zich van de achtergrond, maakt zich daarvan los, men kan spreken van het inwendige en van het uitwendige van de figuur, hij heeft een rand en een vorm. De achtergrond daarentegen heeft niet een zo sterke individualiteit voor het besef van de waarnemer, hij is niet op een duidelijke manier geleed, niet gedifferentiëerd. Lijnen van de figuur eindigen in de rand en zetten zich niet voort in lijnen van de achtergrond, terwijl daarentegen bepaalde lijnen van de achtergrond de indruk maken zich ook achter de figuur bevinden. Het onbelangrijke karakter, dat de achtergrond van een figuur voor onze opvatting blijkt te hebben, kan zich doen gevoelen bij het oplossen van vraagstukken, waarbij men zich van de gegeven figuur moet losmaken en zich in die achtergrond moet gaan begeven door bijv. een lijn uit de figuur te verlengen, een punt te spiegelen of een driehoek te verdubbelen. Maar ook zonder dat men zich noodzakelijk door het trekken van lijnen in de achtergrond van een figuur moet begeven, kan het geval zich voordoen, dat aan de achtergrond een belangrijker rol moet worden toebedeeld dan oppervlakkig gezien het geval lijkt. Wanneer een leerling nog vrijwel niets van de gang van een meetkundige redenering afweet en hij wordt voor de opgave geplaatst om te bewijzen, dat twee overstaande hoeken gelijk zijn (fig. 7), heeft hij zijn aandacht uitsluitend gericht op de figuur, bestaande uit de hoeken P_1 en P_2; dit is dus voor hem de figuur, terwijl de achtergrond slechts een vage presentie heeft in zijn bewustzijn. (Merkwaardig is hierbij, dat de aantrekkingskracht van de scherpe hoeken onder de vier, welke er bij het punt P worden gevormd, hierdoor duidelijk wordt gedemonstreerd dat negen van de tien schoolboeken van deze scherpe hoeken de gelijkheid bewijzen). Uitsluitend van de hoeken P_1 en P_2 is er sprake in de opgave, deze twee hoeken zullen hem dus het sterkst aanspreken, zij vormen de figuur waarvan de rand wordt gevormd door de halve lijnen PA en PD aan de ene kant, PB en PC aan de andere kant. Hij zal er uit zichzelf niet zo licht aan denken, dat ook een van de hoeken P_3 en P_4, die nog in die amorphe achtergrond zitten, een rol van betekenis zou kunnen gaan spelen. Dit moet nu evenwel gebeuren — wanneer hij de stelling wil toepassen dat gelijke hoeken gelijke supplementen hebben —, hij dient de gestrekte hoek APB op te merken, welke ge-

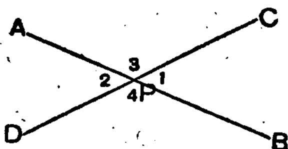


Fig. 7.

vormd wordt door een stuk van de figuur en een stuk van de achtergrond; en het been PC, dat eerst een actief aandeel had in het vormen van de rand van de figuur wordt nu een lijn, die in het inwendige van de nieuw gevormde figuur verloopt.

8. Moeilijkheden van een derde categorie vloeien voort uit een verschijnsel, dat ik aanstonds zal verklaren, en dat wordt aangeduid als „functionele binding"; in het bijzonder heeft Duncker[1]) hierin geëxperimenteerd en ik zal U een enkele van zijn proeven beschrijven. De proefpersonen worden ingedeeld in twee groepen; voor de ene groep zal de proef uit twee delen bestaan, voor de andere groep uit een deel. Bijvoorbeeld wordt er van iedere proefpersoon van de eerste groep verlangd om aan een houten lijst naast elkaar drie draden op te hangen („voor het doen van een slingerproef"). Nu liggen er op een tafel allerlei voorwerpen en daaronder bevinden zich twee korte haken, die van schroefdraad zijn voorzien, en ook het critieke voorwerp, dat als derde haak zal moeten dienst doen, nl. een kleine boor. Een proefpersoon van de eerste groep zal, ten einde zich van zijn taak te kwijten, moeten beginnen met ophangpunten te scheppen. Hij moet eerst gaten boren in de houten lijst om daarin de haken te kunnen schroeven; maar nu zit hij nog met het ophangen van de derde draad. Het enige voorwerp, dat hem ten dienste staat om als derde haak te fungeren, is de boor, die hij zoëven heeft gebruikt om gaten te boren. En nu dient het experiment om te zien, welk percentage proefpersonen van deze eerste groep erin slaagt om op de gedachte te komen, dat die boor gebruikt kan worden als derde haak. — De tweede groep van proefpersonen krijgt precies dezelfde opdracht; op de tafel liggen dezelfde voorwerpen, natuurlijk op dezelfde manier gerangschikt, ze moeten weer beginnen met de twee haken in te schroeven, maar het verschil is, dat ze de boor hiervoor niet nodig hebben omdat de gaten voor de schroeven al van te voren in de lijst zijn aangebracht. Ook zij moeten op de gedachte komen om de op de tafel liggende boor als derde haak te gaan gebruiken, en er wordt nu nagegaan welk percentage van de tweede groep erin slaagt om op die gedachte te komen. Uit de resultaten blijkt, dat in het eerste geval het percentage goede oplossingen aanzienlijk geringer is dan in het tweede geval, dat dus, naar wij kunnen aannemen, de individuen van de eerste groep bij het zien van de boor in zijn oneigenlijke functie van haak gehinderd worden, doordat zij vooraf deze boor hebben gehanteerd in zijn eigenlijke functie. De uitkomst

---

[1]) Karl Duncker, Zur Psychologie des produktiven Denkens (Berlin, Springer, 1935).

van deze proef, tezamen met die van andere dergelijke proeven, maakt het aannemelijk, dat we hier kunnen spreken van een zekere binding, die de boor heeft ondergaan, en wel een functionele binding, want hij wordt niet zo gemakkelijk meer in de functie van haak opgevat, doordat hij vooraf een binding heeft gekregen aan zijn eigenlijke functie. Nauwkeuriger uitgedrukt moeten we hier spreken van een heterogene functionele binding, omdat de oorspronkelijke functie van de boor verschilt van zijn functie als haak. Hadden we in het eerste deel van de proef de boor niet gebruikt als boor maar als voorwerp om iets aan op te hangen, dan had de boor eveneens een functionele binding gekregen, die we dan een homogene binding konden noemen en die de kans op het vinden van de oplossing van het tweede deel van de proef ongetwijfeld zou hebben begunstigd.

9. De proefnemingen, die ik zo heel in het kort heb uiteengezet, trachten dus een antwoord te verschaffen op de vraag: in hoeverre zal het vinden van een object bemoeilijkt worden door een heterogene functionele binding van dat object? De lezer zal ongetwijfeld het gemakkelijkst een duidelijke indruk krijgen van de manier, waarop men dit in de wiskunde kan toepassen, wanneer we de oplossing van een paar problemen analyseren. Ik ontleen deze aan uiteenlopende gebieden van de meetkunde en begin met een ook door Duncker besproken geval. We gaan de stelling bewijzen, dat een rechte lijn niet alle drie zijden van een driehoek kan snijden; nauwkeuriger geformuleerd: wanneer een rechte l een der zijden van $\triangle$ ABC snijdt en niet gaat door een der hoekpunten, dan snijdt l nog één en slechts één andere zijde. Bij het bewijs wordt o.m. het volgende axioma van Pasch — het vierde Anordnungsaxiom van Hilbert — gebruikt: wanneer een rechte l een der zijden van $\triangle$ ABC snijdt en niet gaat door een hoekpunt, dan snijdt l nog minstens één andere zijde. De figuur, die we ons voor de geest halen, wanneer we aan dit axioma denken, is figuur 8, welke we het Pasch-

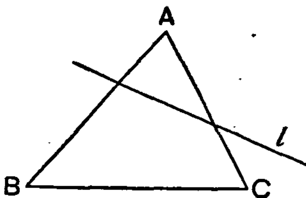


Fig. 8.

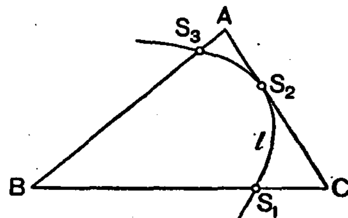


Fig. 9.

model zullen noemen. Het bewijs loopt nu als volgt (zie fig. 9) [1]:

[1]) M. Pasch, Vorlesungen über neuere Geometrie (Leipzig, 1882) 25.

Gesteld dat *l* de drie zijden BC, CA, AB resp. in de punten S_1, S_2, S_3 sneed. Zonder de algemeenheid te schaden mogen we aannemen, dat S_2 tussen S_1 en S_3 ligt. Beschouw nu CA als transversaal van △ BS_1S_3. CA snijdt de zijde S_1S_3 van deze driehoek in S_2, omdat volgens onze onderstelling S_2 tussen S_1 en S_3 ligt. Maar het snijpunt A van CA met de lijn BS_3 ligt niet op de zijde BS_3, omdat S_3 tussen A en B ligt; evenmin ligt C op de zijde BS_1. In strijd met het axioma van Pasch zou CA dus slechts één der zijden van △ BS_1S_3 snijden. Hieruit volgt dat *l* niet alle drie zijden van △ ABC snijdt, w.t.b.w.

Het Pasch-model bevat twee *specifieke functies* (dit in tegenstelling met de aanstonds te bespreken *niet-specifieke functies*), die in dit functionele geheel in een zekere tegenstelling tot elkaar staan; het zijn de functie „zijde van een driehoek" en de functie „transversaal van een driehoek". Dit zijn functies die de gestaltepsychologen noemen: contraire functies, waarbij ze dus aan het logische begrip contrair een afwijkende betekenis geven. In de logica spreekt men van een contraire tegenstelling wanneer in twee oordelen aan een zelfde subject praedicaten worden toegekend, die binnen een reeks van gecoördineerde praedicaten zo ver mogelijk van elkaar af liggen; bijv. „dit is lang" en „dit is kort"; de term „contrair" wordt verder ook wel toegepast op de begrippen zelf, die in de bewuste oordelen als praedicaat optreden, zodat men spreekt van de contraire begrippen lang en kort. Dat men de twee functies van zijde en van transversaal, waarin de lijnen in onze figuur optreden, contraire functies noemt, komt doordat ook zij in een zekere tegenstelling tot elkaar staan; men spreekt dan wel van het „veld", in dit geval bestaande uit de driehoek en de transversaal, en dat veld is als het ware „gepolariseerd"; in de ene pool bevindt zich de driehoek, in de andere pool de transversaal. De typische moeilijkheid in het vinden van het bewijs is nu, dat deze twee functies verwisseld moeten worden. De lijn AC, die transversaal moet worden, had eerst de heterogene functionele binding van: zijde van een driehoek; de lijn S_1S_3, die zijde moet worden, had eerst de heterogene functionele binding: transversaal. Zulke functieverwisselingen, welke binnen het beschouwde systeem dienen plaats te vinden, schijnen aan het denken bijzondere eisen te stellen.

10. Maar er bestaat ook een tweede soort van structuurveranderingen, veroorzaakt door wat men kan noemen functionele bindingen van formele aard, van niet-specifieke aard. Men kent het eenvoudige vraagstukje: bewijs, dat de lijnen, welke, bij snijding van twee evenwijdige lijnen door een derde, twee binnenhoeken

aan dezelfde kant der snijlijn middendoor delen, loodrecht op elkaar staan (fig. 10). We willen onderstellen, dat een leerling dit nu eens niet oplost door op te merken dat de hoeken $A_{1,2}$ en $C_{1,2}$ samen 180° zijn, en dan daarvan de helft te nemen, maar dat hij ziet, dat hij het kan doen door te letten op △ ABC en gaat bewijzen, dat die driehoek gelijkbenig, en bissectrix AS dus tevens hoogtelijn is; een van mijn leerlingen deed het inderdaad zo door op te merken $\angle C_2 = \angle C_1 = \angle B_1$. Op de gedachte aan △ ABC moet hij nu komen uitsluitend afgaande op wat er gegeven is en wat er gevraagd wordt. Dit wijst helemaal niet in de richting van die driehoek. Laten we eens zien in welk opzicht de figuur, zoals hij gegeven is, het vinden van het geheel van de gelijkbenige driehoek met hoogtelijn op de basis in de weg staat. De aanschouwelijke functies van de elementen van de figuur zijn als volgt: de rechten AB en CD met hun snijlijn AC zijn hier: „primair" en „absoluut" gegeven en „secundair" en „relatief" t.o. van deze drie lijnen worden de twee bissectrices getrokken; de naam, bissectrix, wijst er reeds op dat een zekere hoek er van te voren reeds is en dat met betrekking tot die reeds aanwezige hoek, dus pas op het tweede plan komend, de deellijn wordt getrokken. Men kan zelfs zeggen, dat het primaire karakter van de evenwijdige lijnen nog sterker is dan dat van de snijlijn, die, zoals ook alweer blijkt uit zijn naam: snijlijn, pas getrokken wordt nadat de evenwijdige lijnen getekend zijn. Er bestaat hier dus een duidelijke homogeniteit in de manier, waarop de lijnen AB en CD zijn gegeven, en eveneens homogeniteit tussen de bissectrices. Maar deze structuur moet een volkomen metamorphose ondergaan; want in het bewijs beschouwt men de lijn AB, dat is dus een der evenwijdige lijnen, de lijn AC, dat is de snijlijn, en de lijn BC, een der bissectrices, als dragers van de zijden van één driehoek. Deze drie lijnen, waartussen oorspronkelijk dus de grootst mogelijke heterogeniteit bestond, zijn in het bewijs homogeen in hun functie van dragers van zijden van een driehoek. En in die driehoek, relatief t.o. van die driehoek, wordt nu de lijn AS gezien als hoogtelijn, en heeft in die functie dus een sterk heterogeen karakter wanneer we hem vergelijken met de basis BC, waarop hij staat, en waarmee hij in zijn oorspronkelijke functie van bissectrix volkomen solidair was. Wat eerst gecombineerd was, AB met CD en AS met CS, wordt geweldig uit elkaar gedreven, en wat eerst helemaal niet bij elkaar behoorde, een evenwijdige lijn, de

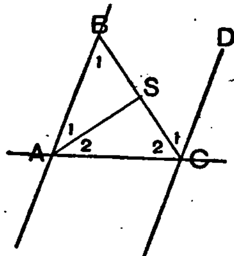


Fig. 10.

snijlijn en een bissectrix, is later verenigd als zijden van een zelfde driehoek. Zoals wij boven konden spreken van een heterogene functionele binding van het gezochte voorwerp (de boor werd niet zo gemakkelijk gezien als haak door zijn functionele binding als instrument om gaten te maken), zo kunnen we hier spreken van een heterogene functionele binding van het „denkmateriaal". Om de stelling van de gelijkbenige driehoek, dat een bissectrix tevens hoogtelijn is, te kunnen toepassen, moet men de gegevens van ons vraagstuk in een andere structuur, als op een andere wijze georganiseerd, gaan beschouwen. En evenals in het eerste wiskundige voorbeeld, dat wij gaven, moeten de elementen maar niet in een willekeurige andere functie worden gezien, maar in een functie, die met zijn voorganger binnen het beschouwde verband contrair is.

11. Dat ook voor deze *formele* eigenschappen de naam „functie" wordt gebruikt, verdient nog enige toelichting. Het heeft nl. de schijn alsof aan de term „functie" nog een derde betekenis wordt verleend, boven de twee — de biologische en de wiskundige — die hij al heeft. Dat reeds deze twee betekenissen in het gebruik moeilijkheden plegen op te leveren, wordt blijkbaar aangevoeld door de bekende Engelse paedagoog en didacticus Hamley; deze acht het althans gewenst om de wisselende betekenis van het woord „functie" toe te lichten met de opmerking, dat men kan spreken van de functie van de leraar en ook van de functie van de lever, maar dat men hetzelfde woord in andere zin gebruikt wanneer men zegt: het temperament van een leraar is een functie van zijn lever! [1]) Het zou dus niet erg practisch zijn om de bewuste uitdrukking in nog weer een andere betekenis te bezigen. De term „functie" wordt hier echter gebruikt in analogie met zijn biologische betekenis: de rol, die een bepaald deel van een levend wezen vervult bij het levensproces. Immers, slechts wanneer men de elementen van de figuur beschouwt in hun kwaliteit van „deel van het geheel" bezitten zij de aanschouwelijke eigenschappen in kwestie: in fig. 8 is lijn *l* slechts transversaal in verband met de gehele figuur, maar evenzo is het primaire karakter van de lijnen AB en CD in fig. 10 slechts dan van kracht, wanneer we letten op de overige delen van de figuur. Daarom wordt niet alleen het transversaal-zijn een functie van *l*, maar ook het primair-zijn een functie van AB en CD genoemd.

12. In de analyse van het bewijs van de stelling, dat een rechte niet alle drie zijden van een driehoek kan snijden, kwamen de

---

[1]) H. R. Hamley, Relational and functional thinking in mathematics (Teachers College, Columbia University, New York, 1934) 5.

specifieke functies „zijde" en „transversaal" ter sprake; deze functies waren van materiële aard, in tegenstelling met de functies, die we in de onderhavige analyse bekijken: deze zijn van niet-specifieke, formele aard. Dergelijke formele bindingen, die evenzeer een camouflerende uitwerking plegen te hebben als de materiële, zijn echter ook wel aanwezig in het geval van § 9; omtrent de functionele bindingen van △ ABC kunnen we daar nl. opmerken:

a. de rechten BC, CA, AB zijn „homogeen", ze vervullen dezelfde rol;

b. ze zijn ook „primair", „absoluut" gegeven.

Deze functionele bindingen worden als volgt losgemaakt bij toepassing van het axioma van Pasch:

a. de rechte CA komt niet meer verenigd voor met de rechten BC en AB, hij is „heterogeen" met deze rechten, want hij vervult niet meer dezelfde rol.

b. en ook behoort CA niet meer tot hetgeen „primair" gegeven is: deze formele functie wordt nu bekleed door de dragers van de zijden van △ BS_1S_3, terwijl de rechte CA „secundair" en „relatief" ten opzichte daarvan is geworden.

13. De hier gekozen voorbeelden, welke ik niet uitsluitend ontleende aan de middelbaar-onderwijs leer- en oefenstof, zouden de indruk kunnen wekken, dat men dergelijke materiële en formele functieveranderingen slechts sporadisch en alleen bij ijverig zoeken kan ontdekken. Om te laten zien dat dit volstrekt niet het geval is, dat men ze integendeel ieder ogenblik tegenkomt, wanneer men er maar op let, wil ik wijzen op twee figuren, welke in de loop van het congres, waarvan dit referaat een onderdeel uitmaakt, op het bord kwamen te staan.

In fig. 11 is H het hoogtepunt van △ ABC. Men kan evenwel opmerken, dat ook A hoogtepunt is, nl. van △ HBC. Welke structuurveranderingen moet de figuur daartoe ondergaan? *a.* de rechten AB en AC zijn eerst dragers van zijden van een driehoek maar verwisselen deze functie met die van dragers van hoogtlijnen; *b.* de rechten CC′ en BB′ zijn eerst hoogtelijnen maar gaan over in zijden. We zien hier niet slechts een willekeurige verandering van de functie van deze rechten, maar een volmaakte verwisseling van functie: wat eerst zijde was wordt hoogtelijn, en omgekeerd. Ook in de formele functies van de lijnen AB en AC aan de ene kant en de lijnen CC′ en BB′ aan de andere kant treedt een verandering op. *a.* de rechten

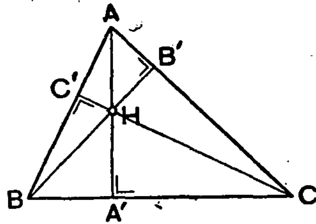


Fig. 11.

AB en AC zijn er het eerst, zij hebben een primair en absoluut karakter, en secundair en relatief ten opzichte daarvan worden de hoogtelijnen CC′ en BB′ neergelaten; vervolgens zijn evenwel deze laatste lijnen primair gegeven en worden daarop de loodlijnen BA en CA neergelaten. *b.* de homogeniteit die er tussen de lijnen BC, CA en AB bestaat wordt opgeheven; de rechten CA en AB worden op een andere manier behandeld dan de basis BC, welke laatste een zijde blijft, alleen deze functie in een andere driehoek gaat vervullen waarvan de eerste twee geen zijden zijn. *c.* de homogeniteit, welke er tussen de drie lijnen AA′, BB′ en CC′ bestond, wordt ook vernietigd, de eerste van deze drie blijft hoogtelijn, maar de laatste twee niet. — Tenslotte is het van belang op te merken, dat wat eerst tot de rand van de „figuur" behoorde, nl. de lijnstukken AB en AC, na de structuurverandering naar de achtergrond van de nieuwe „figuur", nl. △ HBC, is verhuisd.

In fig. 12, voorstellende de constructie van het inverse punt A′ van het punt A t.o. van een gegeven cirkel M zonder gebruik te maken van een liniaal, moet men opmerken, dat △ AMP gelijkvormig is met △ PMA′. Structuurverandering: *a.* PM, eerst been van de gelijkbenige driehoek PMA′, wordt basis van de gelijkbenige driehoek AMP; *b.* lijn AM, eerst drager van de basis van △ PMA′, gaat over in drager van een been van △ AMP. Zoals men ziet, weer een verwisseling van functies.

Fig. 12.

14. Structuurveranderingen van formele aard ontmoet men het meest onder de gedaante van verandering in de homogeniteit van de gegevens.

a. Laten we nog eens aannemen dat een leerling in het begin van de eerste klasse zelfstandig probeert te bewijzen, dat overstaande hoeken gelijk zijn (fig. 13). Ik onderstel hierbij, dat de leerling waarover het hier gaat niet meer wordt geremd door de tegenstelling figuur — achtergrond van § 7, maar dat hij de regressieve redeneermethode nog niet machtig is, dat hij zich dus niet de vraag stelt: „over welke middelen beschik ik om te bewijzen, dat twee hoeken gelijk zijn" en dan opmerkt „tracht te bewijzen, dat ze het-

Fig. 13.

zelfde supplement hebben", om zodoende tot de hoek P_3 te worden gevoerd. Maar ik onderstel, dat zijn oog intuïtief moet vallen op $\angle P_3$, dat hij opmerkt dat deze hoek het supplement is van $\angle P_1$ en van $\angle P_2$, en dat hij zodoende op de gedachte gebracht wordt om de stelling toe te passen van de gelijke supplementen. Hier wordt hij dus niet van buiten af tot die stelling gevoerd door zich bewust op de hem ten dienste staande middelen te bezinnen, welke kunnen dienen om te bewijzen, dat twee hoeken gelijk zijn, maar hij merkt eerst iets op omtrent in de figuur aanwezige supplementen; van daaruit wordt hij op de gedachte aan de bewuste hulpstelling gebracht. Het syllogisme, dat hierbij optreedt zou in zijn volledige vorm aldus luiden:

van gelijke hoeken zijn de supplementen gelijk
de hoeken P_1 en P_2 zijn supplementen van dezelfde hoek
de hoeken P_1 en P_2 zijn gelijk.

Onze leerling vindt dus de tweede premisse het eerst, en wordt daardoor pas gebracht op de gedachte aan de eerste premisse. Wanneer zijn denken aldus verloopt, en dat is de natuurlijke gang van zaken, komen de hoeken P_1 en P_2 eerst in de figuur volkomen gelijkwaardig voor en samengevat tot één groep. Voor het bewijs moeten zij echter ieder afzonderlijk worden bekeken en worden samengevat met — bijv. — $\angle P_3$. De hoeken P_1 en P_2 worden dus even van elkaar gescheiden en ze worden niet gelijktijdig samengenomen met $\angle P_3$; al is het waar, dat niet alleen $\angle P_1$ met $\angle P_3$ wordt samengenomen, maar ook $\angle P_2$, zodat tenslotte de hoeken P_1 en P_2 dezelfde behandeling ondergaan. Maar met $\angle P_2$ gebeurt dit enige tijd later dan met $\angle P_1$. En verder komen de hoeken P_3 en P_4 in de figuur op volkomen analoge manier voor. Niets onderscheidt $\angle P_3$ van $\angle P_4$ wat betreft zijn geschiktheid om het vraagstuk tot een oplossing te brengen. Evenwel doet $\angle P_4$ in het bewijs in het geheel niet mee, terwijl $\angle P_3$ een centrale rol vervult. Dat het destructureren van deze homogeniteit tussen de hoeken P_3 en P_4 inderdaad voor sommige leerlingen een moeilijkheid is blijkt hieruit, dat men wel het volgende bewijs krijgt: „P_3 is het supplement van $\angle P_1$, $\angle P_4$ is het supplement van $\angle P_2$, gelijke hoeken hebben gelijke supplementen, dus is $\angle P_1 = \angle P_2$".

b. Wanneer een leerling de stelling heeft gehad, dat in een gelijkbenige driehoek de basishoeken gelijk zijn, en hij wordt voor de taak gesteld te bewijzen, dat in een gelijkzijdige driehoek elk der hoeken 60° is, moet hij o.a. opmerken, dat $\triangle$ ABC een gelijkbenige driehoek is met BC als basis, en met AB en AC als benen. De homogeniteit, welke er eerst bestond tussen de drie zijden van

de driehoek, nl. dat ze alle drie gelijk waren, wordt wredelijk verstoord en een van de drie moet een ogenblik „voor spek en bonen" meedoen. Het is verder mogelijk, dat er nu een nieuwe binding is ontstaan, nl. die van de heterogeniteit tussen de zijde BC aan de ene kant en de zijden AB en AC aan de andere kant. Dan moet, wanneer vervolgens △ ABC beschouwd wordt als gelijkbenige driehoek met basis AC en top B, ook deze heterogeniteit althans ten dele worden teniet gedaan; immers nu wordt er een homogeniteit ingesteld tussen de zijden BC en AB in hun kwaliteit van benen.

c. Wanneer bewezen moet worden, dat twee hoeken, waarvan de benen in dezelfde richting evenwijdig lopen, gelijk zijn, en men doet dit door QP te verlengen en op de aldus ontstane paren overeenkomstige hoeken te letten, betekent dit bij het eerste paar ($\angle P_1 = \angle S_1$) een verstoren van de homogeniteit, welke er bestaat tussen de benen AB en PQ; immers AB wordt buiten beschouwing gelaten en PQ wordt behandeld als snijlijn van de evenwijdige lijnen AC en PR; bij het tweede paar overeenkomstige hoeken heeft een dergelijke structuurverandering plaats.

Fig. 14.

d. De gelijkheid van de bogen AC en BD in fig. 15, waarin AB evenwijdig is met CD, volgt onmiddellijk uit de gelijkheid van de verwisselende binnenhoeken bij A en D. Wanneer men echter dit vraagstuk in de klas opgeeft (natuurlijk na het verband te hebben afgeleid tussen een omtrekshoek en de boog, waarop hij staat) zal men ervaren, dat vrijwel iedereen de oplossing tracht te vinden door vanuit het middelpunt een loodlijn op de koorden neer te laten. Inderdaad, het zien van de hulplijn AD vereist een verstoren van de homogeniteit, welke er bestaat tussen de punten A en C, de twee linkereindpunten van de koorden, en ook die tussen de punten A en B, de beide uiteinden van een zelfde koorde.

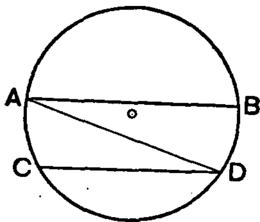


Fig. 15.

e. Men bewijst de stelling, dat een cirkel en een lijn geen punt gemeen hebben wanneer de afstand van het middelpunt tot de lijn groter is dan de straal, door een willekeurig punt op de lijn te nemen en te bewijzen, dat het niet op de cirkel ligt. Dit betekent een verstoren van de solidariteit, welke er bestaat tussen de lijn en de cirkel. Men neemt, volkomen willekeurig, op de lijn een punt aan, niet op de cirkel. Een van die twee wordt dus op een bijzondere manier behandeld.

f. Bij het bekende bewijs, dat een regelmatige veelhoek een omgeschreven cirkel heeft, dat wil dus zeggen dat er een cirkel is die door *alle* hoekpunten gaat, verstoort men de homogeniteit van die hoekpunten door drie opeenvolgende ervan in het bijzonder te beschouwen en daar doorheen een cirkel te leggen. Vervolgens bewijst men, dat elk van de andere hoekpunten op die cirkel ligt.

g. Men ontmoet het verstoren van een bestaande homogeniteit bij allerlei gelegenheden; wanneer men bijv., zoals Dr. Beth in zijn Meetkunde van de Ruimte, als axioma invoert: om één rechte van het vlak is een omlegging mogelijk, dan betekent dit een verstoren van de homogeniteit, die er bestaat tussen *alle* rechten van het vlak. Ik vermoed dat een dergelijk axioma om deze reden pas na enig tegenstribbelen door de klas wordt geaccepteerd.

h. Stel er moet worden bewezen, dat alle elementen van een bepaalde verzameling een zekere eigenschap bezitten, die in de opgave geformuleerd is. Betekent dit voor een leerling van de eerste klas zonder meer, dat hij nu een willekeurig exemplaar uit die groep dingen moet nemen en van dit exemplaar bewijzen, dat het de genoemde eigenschap heeft? De ondervinding zegt mij, dat dit niet het geval is en dat een leerling er in het allereerste begin moeite mee heeft om de totaliteit van die groep dingen te destructureren. Zo bijv. in de opgave: bewijs, dat een parallelogram door het trekken van de beide middenparallellen in vier parallelogrammen wordt verdeeld. Veel leerlingen vinden het hier niet uit eigen beweging vanzelfsprekend om hun aandacht uitsluitend op één der ontstane vierhoeken te richten in plaats van op alle vier tegelijk.

Het trof mij, dat deze moeilijkheid niet beperkt blijft tot de eerste klas en dat bovendien niet alleen een dergelijke redenering niet altijd vanzelf door een leerling wordt bedacht, maar dat zelfs een op die manier reeds gehouden redenering nog niet eens altijd overtuigend werkt. We hadden in de vierde klas het vraagstuk behandeld: staat lijn *a* loodrecht op vlak *α*, en is *b* evenwijdig met *a*, dan staat ook *b* loodrecht op *α*. Dit bewijs ging aldus, dat ik liet zien, dat *b* loodrecht stond op een willekeurige lijn van *α*. Een van mijn leerlingen, en niet een van de slechtsten, maakte tegen dit bewijs het bezwaar, dat we nu slechts hadden aangetoond, dat *b* loodrecht staat op één lijn van *α*, terwijl bewezen diende te worden dat hij loodrecht staat op twee (elkaar snijdende) lijnen. Er moest volgens hem nog de opmerking aan worden toegevoegd, dat voor een tweede lijn van *α*, die de eerste snijdt, een dergelijke redenering kan worden gehouden.

15. Het is gebleken dat vele van de denkmoeilijkheden, waar-

mee onze leerlingen — en misschien soms ook wel wijzelf — te kampen hebben, met structuurverschijnselen in verband staan[1]). Niemand zal de wenselijkheid ervan willen ontkennen dat wij als leraren ons goed rekenschap geven van de aard van deze en andere moeilijkheden en van de plaatsen waar zij optreden. Naar het mij voorkomt is er meer dan één reden, waarom dit gewenst is. In de eerste plaats zullen wij onmogelijk onze leerlingen bij hun moeilijkheden kunnen helpen, wanneer we die zelf niet als moeilijkheden herkennen. Maar verder ben ik ervan overtuigd, dat wij, wanneer we onze leerlingen doen gevoelen, dat wij hun moeilijkheden als zodanig begrijpen, reeds door deze simpele daad hun moeilijkheden helpen verlichten.

---

1) Vgl. een artikel van schrijver dezes in Paedagogische Studiën, 23e jaargang, afl. 6—8, Over moeilijkheden van structurele aard bij het onderwijs in de meetkunde.

EENIGE KARAKTERISTIEKE KENMERKEN DER MODERNE WISKUNDE

door

Dr A. C. ZAANEN[1]).

Terwijl het in de loop van de 17de en de 18de eeuw nog gebruikelijk was, de wiskunde en de natuurwetenschappen tegelijk te bestudeeren en ze min of meer als één geheel te beschouwen, is hierin gedurende de vorige eeuw langzamerhand verandering gekomen. De steeds toenemende omvang van de genoemde wetenschappen heeft er toe geleid, dat het vrijwel onmogelijk werd, dat zoowel op wiskundig als op natuurwetenschappelijk gebied door één zelfde persoon werk van groot gehalte geleverd zou kunnen worden. Als ik, wat ik zei, door een beeld mag toelichten en het wetenschappelijk werk op het gebied van de wiskunde en de natuurwetenschappen met het werk in een tuin mag vergelijken, dan is het, omdat het aantal gekweekte gewassen te groot geworden is, onmogelijk geworden dat één bepaalde tuinman met kennis van zaken werkzaam kan zijn in elk willekeurig gedeelte van deze tuin. De tuin, die oorspronkelijk één geheel vormde, is nu verdeeld in een aantal gedeelten, elk met een eigen schare van tuinlieden. Laat ons thans dat deel van de tuin, dat gewijd is aan de cultiveering der wiskunde, iets nader bezien. Vele leeken op wiskundig terrein, die in hun jeugd min of meer gedwongen eenige tijd in de voorhof van deze tuin vertoefd hebben, meenen dat er achter de haag, die deze voorhof omgeeft, verder niet veel meer is en dat het de voornaamste taak der tuinlieden, die zich wiskundigen noemen, zou zijn de voor het meerendeel reeds eeuwen oude beplanting van de voorhof zorgvuldig te verzorgen en voor sterven te behoeden. Niets is echter minder waar. Nadat in de eerste helft der 17de eeuw Descartes de eerste schreden gezet had op de weg, die zou leiden tot de ontwikkeling der analytische meetkunde en nadat ongeveer een halve eeuw later Newton en Leibniz de beginselen der differentiaal- en integraalrekening geformuleerd hadden, gaf de 18de eeuw het beeld te zien van een uitgebreide toepassing der methoden van de genoemde geleerden op alle gebieden der toenmaals bestaande wis-

[1]) Openbare les, gehouden op 22 October 1946 bij de aanvaarding van het privaat-docentschap aan de Rijks-Universiteit te Leiden.

kunde en wiskundige natuurkunde, zoodat er tegen het einde van deze eeuw een groote massa van tamelijk los met elkaar samenhangende detailresultaten aanwezig was. Om weer even het beeld van onze tuin te gebruiken: deze had zich uitgebreid, maar nog al chaotisch. In alle richtingen waren nieuwe paden aangelegd, waarlangs talrijke ontgonnen stukken grond lagen, terwijl zich daartusschen nog vele onbetreden en dus onbekende gedeelten bevonden. Aan het eind van de 18de eeuw was het de Franschman Lagrange, die voor het eerst door een consequente toepassing van analytische methoden een ordelijk geheel maakte van dat deel van de tuin, dat mechanica heette. Dit zelfde streven naar ordening en grootere planmatigheid in opzet, dat zich in het werk van Lagrange uitte, trad daarna in de 19de eeuw meer en meer op de voorgrond, en er ontstonden algemeene theorieën, die het verband duidelijk maakten tusschen vele der reeds bekende losse resultaten. Daarnaast echter vond er een uitbreiding van de omvang plaats in nog sneller tempo dan de vorige eeuw reeds te zien gegeven had. Als typisch voorbeeld moge dienen het feit, dat de Rus Lobatschewsky, de Hongaar Bolyai en de Duitscher Riemann elk evenveel nieuwe meetkunde maakten als alle Grieksche wiskundigen samen geschapen hadden in de drie eeuwen van hun grootste activiteit. Volgens schatting is de hoeveelheid wiskunde in de 19de eeuw alleen vervijf- of verzesvoudigd, terwijl de kwaliteit van het gepresteerde daaronder niet leed, zooals men misschien verwachten zou, maar door de hoogere eischen die gesteld werden, juist verbeterde. Na 1900 is deze groei niet tot stilstand gekomen; in de eerste vier tientallen jaren van de eeuw, waarin wij nu leven, is de hoeveelheid wiskunde nogmaals verdubbeld. Het volgende zal U een denkbeeld geven van deze groei, die nog steeds voortgaat: volgens een eenige jaren voor het uitbreken van de tweede wereldoorlog gehouden telling verschenen er toen per jaar tusschen 4000 en 5000 boeken en tijdschriftartikelen op wiskundig gebied. En nu moge dit aantal in de jaren van de oorlog waarschijnlijk wat gedaald zijn; het is aan geen twijfel onderhevig dat het oude getal spoedig weer bereikt zal zijn en misschien zelfs overtroffen zal worden. Dit gehoord hebbend zal het U dan ook niet verbazen, wanneer ik zeg dat hetzelfde verschijnsel, dat zich een eeuw geleden openbaarde in het geheel van wiskunde en natuurwetenschappen, zich nu voordoet op het gebied van de wiskunde alleen: het is onmogelijk geworden dat een zelfde wiskundige belangrijk werk verricht op alle terreinen der hedendaagsche wiskunde. De laatsten, die daartoe in hun tijd nog in staat geweest zijn, waren wel de Franschman Henri Poincaré en de Duitscher